

Bachelorarbeit

**Transportmessungen zum  
Quanten-Hall-Effekt  
und fraktionalem Quanten-Hall-Effekt  
in einer Corbino-Geometrie**

von  
**Alexander Fufaev**

Leibniz Universität Hannover  
22. Juli 2019

*Alexander Fufaev*

Matrikelnummer: 3153800

Prüfer: Prof. Dr. Rolf J. Haug

Betreuer: Gunnar Schneider

Institut für Festkörperphysik

*Aktualisierte Version* (21. August 2019)

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Transporteigenschaften eines auf eine tiefe Temperatur heruntergekühlten zweidimensionalen Elektronengases (2DEG) in einem externen Magnetfeld untersucht. Das 2DEG ist dabei in einer ein Millimeter kleinen Corbino-Geometrie als Halbleiterheterostruktur innerhalb der GaAs-Schicht realisiert und wird einem bis zu 18 T großen orthogonal anliegenden Magnetfeld bei Temperaturen im mK-Bereich ausgesetzt. Die Messungen zeigen typische Schubnikow-de-Haas Oszillationen (SdHO) mit auftretenden ganzzahligen Füllfaktoren (ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt (IQHE)) und fraktionalen Füllfaktoren (fraktionaler Quanten-Hall-Effekt (FQHE)). Es wurden mehr als 38 ganzzahlige und 10 fraktionale Füllfaktoren beobachtet. Die Messungen des QHE und FQHE werden dazu ausgenutzt, um die Eigenschaften des 2DEG zu charakterisieren.

Bei kleinen Magnetfeldern wird das Drude-Modell benutzt, um die Transportstreuzeit und daraus die Ladungsträgerdichte sowie Mobilität der Probe abzuschätzen. Auch mittels der üblichen Methoden, d.h. aus der Periodizität der SdHO und der Kurve von  $1/B$  gegen den Füllfaktor, wird die Ladungsträgerdichte des 2DEG bestimmt, wobei die erste Methode eine mit dem Magnetfeld leicht variierende Ladungsträgerdichte zeigt. Aus der Amplitude der SdHO wird die Quantenstreuzeit bestimmt, die sich deutlich von der Transportstreuzeit unterscheidet und die besser für die Charakterisierung der Qualität des 2DEG bezüglich der Beobachtbarkeit des FQHE eignet.

Ab einem bestimmten Magnetfeld trat die Spinaufspaltung auf, die in Abhängigkeit von der Temperatur untersucht wurde. Dabei zeigte das Magnetfeld, bei dem die Spinaufspaltung beginnt, ein sättigendes Verhalten. Hieraus konnte die Temperatur des 2DEG abgeschätzt werden, ab der die angelegte Temperatur am Mischkryostaten keine weiter abkühlende Wirkung der Probe zeigte.

Aufgrund der geringen Auflösung des verwendeten Lock-in-Verstärkers waren tiefe Minima abgeschnitten, weshalb ihre Temperaturabhängigkeit nicht untersucht werden konnte. Dazu wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie mithilfe der Talbreite, dieses Problem umgangen werden könnte. Für alle nicht abgeschnittenen Minima wurde ihre Temperaturabhängigkeit untersucht, woraus die Aktivierungsenergie ganzzahliger Füllfaktoren bis 1 T sowie fraktionaler Füllfaktoren abgeschätzt werden konnte. Mithilfe der Aktivierungsenergien und den dazugehörigen Minima wurde die effektive Masse des Elektrons in GaAs bestimmt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Landau-Niveaus . . . . .	2
1.2	Einschränkungen durch die Probengeometrie . . . . .	6
1.2.1	Radiuslücke . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Experimentelle Grundlagen</b>	<b>10</b>
2.1	Kryostat . . . . .	10
2.2	Mischkryostat . . . . .	11
2.3	Die untersuchte Probe . . . . .	12
2.4	Messaufbau . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Magnetotransportmessungen</b>	<b>16</b>
3.1	Magnetfeldabhängigkeit der Leitfähigkeit . . . . .	16
3.1.1	Magnetfeldabhängigkeit von -1 T bis 1 T . . . . .	16
3.1.2	Magnetfeldabhängigkeit bis 18 T . . . . .	18
3.2	Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit . . . . .	20
3.2.1	Temperaturabhängigkeit bis 1 T . . . . .	21
3.2.2	Temperaturabhängigkeit bis 18 T . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Analyse der Beobachtungen</b>	<b>24</b>
4.1	Leitfähigkeit bis 0.1 T . . . . .	24
4.2	Die Amplitude der Leitfähigkeitskurve . . . . .	26
4.3	Breite der Leitfähigkeitsminima . . . . .	29
4.4	Minima erster und zweiter Art (IQHE) . . . . .	31
4.4.1	Beginn der Minima erster Art . . . . .	32
4.4.2	Eindeutige Nummerierung der Minima . . . . .	34
4.4.3	Magnetfeldabhängigkeit der Minima erster Art . . . . .	37
4.4.4	Temperaturabhängigkeit der Minima erster und zweiter Art . . . . .	39
4.4.5	Beginn der Minima zweiter Art . . . . .	44
4.5	Minima dritter Art (FQHE) . . . . .	45
4.5.1	Temperaturabhängigkeit der Minima dritter Art . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>50</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

Ein freies Elektron, welches sich in einem senkrecht zur Bewegung ausgerichteten homogenen Magnetfeld bewegt, erfährt eine Lorentzkraft, die das Elektron auf eine Kreisbahn ablenkt. Im klassischen Fall, d.h. bei hohen Temperaturen, kann der Bahnradius einen beliebigen Wert annehmen, vorausgesetzt das Elektron ist nicht durch die Probenbegrenzung o.Ä. in seiner Bewegung eingeschränkt.

In dieser Arbeit wird das Verhalten eines durch die Probengeometrie eingeschränkten Elektronengases im Magnetfeld bei Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts untersucht. Außerdem wird ein externes elektrisches Feld angelegt, sodass die Elektronen dadurch eine Beschleunigung erfahren. Unter diesen Bedingungen muss Folgendes beachtet werden:

- Da es sich nicht um ein einzelnes Elektron handelt, sondern um ein Elektronengas, können die Elektronen miteinander wechselwirken.
- Das Elektronengas ist durch die Probenbegrenzungen eingeschränkt.
- Bei tiefen Temperaturen verhalten sich die Elektronen quantenmechanisch, was zu Phänomenen führen kann, die in der klassischen Mechanik kein Analogon finden, wie z.B. der Spin und Interferenz von Elektronen mit sich selbst. Außerdem nehmen die Kreisbahnradien der Elektronen bei tiefen Temperaturen nur diskrete Werte an.
- Das externe elektrische Feld beeinflusst die Energie und die Kreisbahnen der Elektronen.

Im Folgenden wird die komplexe Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigt. Das quantenmechanische Verhalten eines Elektrons wird durch die Wellenfunktion  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  beschrieben, die durch das Lösen der Schrödinger-Gleichung herausgefunden werden kann.

Für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld, welches in einem Potential  $V_C(z)$  eingesperrt ist, lautet die Schrödinger-Gleichung [1]:

$$\left[ \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A}(\mathbf{R}, t))^2 + q \varphi(\mathbf{R}, t) + V_C(z) \right] \Psi(\mathbf{R}, t) = i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{R}, t) \quad (1)$$

Der erste Summand ist die kinetische Energie, in der der Impulsoperator  $\hat{\mathbf{p}} = i\hbar \nabla$  (kanonischer Impuls) und das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$  steckt. Mit dem Vektorpotential wird das Magnetfeld durch  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  berücksichtigt.  $\varphi(\mathbf{R}, t)$  ist das elektrische Potential und  $q$  die Ladung des Teilchens.

Das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  muss so gewählt werden, dass das im Experiment verwendete Magnetfeld  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  in  $z$ -Richtung zeigt. Das Vektorpotential muss also folgende

Gleichung für die dritte Komponente des Kreuzprodukts  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  erfüllen:

$$B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2)$$

An dieser Stelle offenbart sich der Nachteil der Schrödinger-Gleichung, denn sie ist auf nicht direkt messbaren elektromagnetischen Potentialen aufgebaut, deren Wahl für ein gegebenes elektromagnetisches Feld im Rahmen der Eichfreiheit willkürlich ist. Auf diese Weise kann die Form der Wellenfunktion verändert werden, was die physikalische Interpretation der Wellenfunktion (abgesehen von dem messbaren Betragsquadrat) erschwert. So kann für das in dieser Arbeit verwendete Magnetfeld die Landau-Eichung  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  benutzt werden, um die Wellenfunktion translationsinvariant zu machen oder die symmetrische Eichung  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} B(-y, x, 0)$ , um sie lieber symmetrisch um den Innenkontakt des Corbino-Rings zu machen [1]. Dieses Problem wird noch gravierender, denn das im Rahmen der Eichfreiheit frei wählbare Potential hat einen realen Einfluss auf das Verhalten der Elektronen, wie das beispielsweise der Aharonov-Bohm-Effekt zeigt. Der in dieser Arbeit untersuchte Quanten-Hall-Effekt ist genau diesem Problem unterworfen. Die anschauliche Erklärung des Quanten-Hall-Effekts wird deshalb mit den Begriffen der Quantenmechanik kaum möglich sein. Aus diesem Grund wird die einfachste Eichung, die Landau-Eichung gewählt, die die Schrödinger-Gleichung deutlich vereinfacht.

Das Elektronengas wird in dieser Arbeit in einem von der Aufbau der Probe abhängigen Einschlusspotential  $V_C(z)$  in die z-Richtung (Wachstumsrichtung der Halbleiterheterostruktur) eingesperrt. Die räumliche Einschränkung des Elektronengases in die z-Richtung führt zur Quantisierung der Elektronenenergien in diese Richtung [2]. Die einzelnen Energieniveaus  $E_z^i$  in z-Richtung werden als Subbänder bezeichnet. Hier wird nur das unterste Subband  $E_z^0$  untersucht.

Um diesen energetischen Zustand zu realisieren, wird das Elektronengas abgekühlt, damit die thermische Anregung der Elektronen in die höher liegenden Subbänder unwahrscheinlich wird. Das Elektronengas kann sich dann quasi nur in zwei Dimensionen, in der x-y-Ebene bewegen, weshalb es als *zweidimensionales Elektronengas* (2DEG) bezeichnet wird.

## 1.1 Landau-Niveaus

Die Anteile des elektrischen Feldes  $q\varphi(x, y)$  und des Einschlusspotentials  $V_C(z)$  lassen sich in der Schrödinger-Gleichung separieren und unabhängig voneinander lösen. Die zusätzliche Energie durch diese beiden Terme wird einfach zu (5) dazu addiert [1], wenn das Problem genauer betrachtet werden sollte. Für diese Arbeit reicht es den interessantesten Anteil zu untersuchen, nämlich der Einfluss des Magnetfeldes! Dazu wird die stationäre Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion  $\psi(x, y)$  gelöst, die in der x-y-Ebene

orthogonal zum Magnetfeld liegt:

$$\left[ \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A}(\mathbf{R}))^2 \right] \psi(x, y) = \varepsilon_i \psi(x, y) \quad (3)$$

hierbei sind  $\varepsilon_i$  die möglichen Energien (Eigenwerte) der Wellenfunktion  $\psi(x, y)$ . Die Lösung von (3) ergibt quantisierte Energien (genannt *Landau-Niveaus*) [1]:

$$\varepsilon_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \quad (4)$$

mit der Quantenzahl  $i = 1, 2, 3, \dots$  und der Zyklotronfrequenz  $\omega_c = eB/m$ . Der Spin der Elektronen ist bei verwendeten Magnetfeldern nicht vernachlässigbar. Die Elektronenenergie wird je nach Spinausrichtung im Magnetfeld abgesenkt oder erhöht (Spin-Aufspaltung). Das wird durch den Zeeman-Term berücksichtigt [1]:

$$\varepsilon_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \pm \frac{1}{2} g \mu_B B \quad (5)$$

wobei hier  $\pm 1/2$  der Spin des Elektrons,  $\mu_B$  das Bohr-Magneton und  $g$  der effektive Landé-Faktor des Elektrons im 2DEG ist.

Wegen der Quantisierung der Elektronenenergien und unter der Voraussetzung, dass die Zahl der Zustände erhalten bleibt, gibt es in einem idealen System keine energetischen Zustände zwischen den Landau-Niveaus. Folglich muss die bei  $B = 0$  konstante Zustandsdichte im Magnetfeld in eine Reihe von  $\delta$ -Funktionen aufspalten, die den Abstand  $\hbar \omega_c$  zueinander haben:

$$D(\varepsilon) = \frac{eB}{h} \sum_i \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) \quad (6)$$

In einem realen System, in dem die Elektronen gestreut werden können, entstehen lokalisierte Zustände zwischen den Landau-Niveaus, was zur Verbreiterung der  $\delta$ -Peaks der Zustandsdichte führt (siehe Abbildung 1) [1]. Werden diese verbreiterten Peaks beispielsweise durch die Gauß-Funktionen angenähert, so lässt sich ihre energetische Verbreiterung  $\Gamma$  mit der Zeit-Energie-Unschärferelation durch die Streuzeit  $\tau_q$  abschätzen:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau_q} \quad (7)$$

Die Energie  $\Gamma$  bestimmt also die maximale Auflösung der Landau-Niveaus und der Spin-Aufspaltung und damit die Beobachtbarkeit der zugrundeliegenden physikalischen Phänomene, wie den Quanten-Hall-Effekt. Konkret heißt das, dass der energetische Abstand der Landau-Niveaus  $\hbar \omega_c$  größer als die Verbreiterung  $\Gamma$  eines Landau-Niveaus sein muss. Oder alternativ formuliert:

$$\omega_c \tau_q > 1 \quad (8)$$

Diese Beziehung sagt aus, dass der Quanten-Hall-Effekt theoretisch nur dann beobachtbar ist, wenn das Elektron innerhalb der Streuzzeit mindestens einen Umlauf auf seiner Kreisbahn schafft. Diese Bedingung kann also zum Einen durch eine reinere Probe ( $\tau_q$  groß) und zum Anderen durch größere Magnetfelder ( $\omega_c$  groß) erreicht werden. Ein weiterer Parameter, der die Beobachtbarkeit des QHE bestimmt, ist die Temperatur. Die Fermi-Verteilung, bei der der Ladungstransport stattfindet, wird dann um  $\sim k_B T$  verbreitert. Ist diese Verbreiterung größer als der Abstand  $\hbar\omega_c$  der Landau-Niveaus, so werden diese zu einem kontinuierlichen Energieband ohne Energielücke dazwischen. In diesem Fall ist die Wirkung des Magnetfelds vernachlässigbar und die Zustandsdichte wird konstant. Der Quanten-Hall-Effekt, der auf der Wechselwirkung der Elektronen mit einem Magnetfeld beruht, kann dann nicht mehr beobachtet werden.

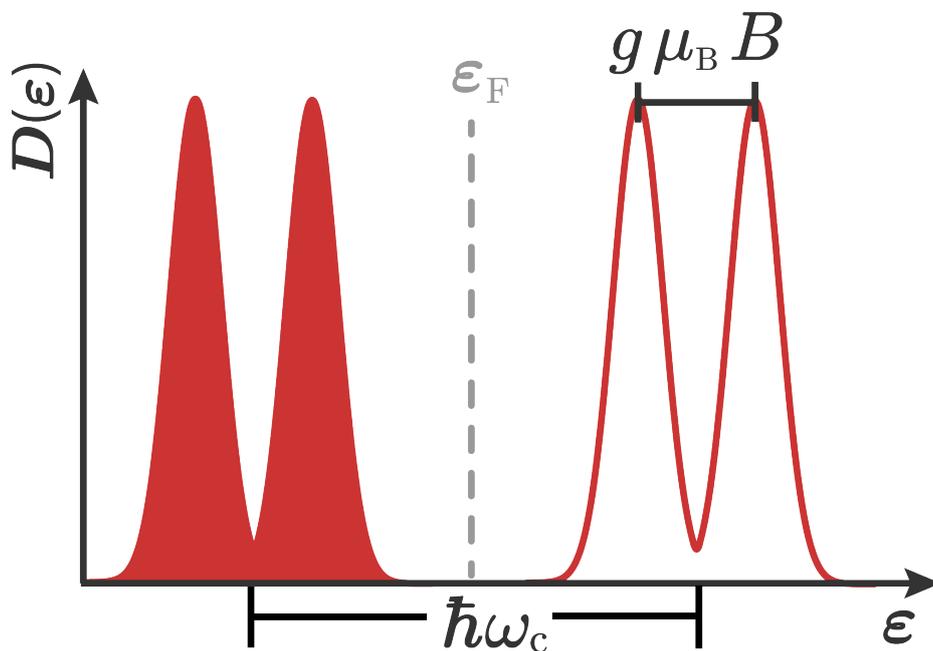


Abbildung 1: Gaußförmiger Verlauf der zweidimensionalen Zustandsdichte in einem externen Magnetfeld. Die Landau-Niveaus mit dem energetischen Abstand  $\hbar\omega_c$ . Bei größerem Magnetfeld tritt Spinaufspaltung ein. Beispielhaft eingezeichnete Fermi-Energie  $\varepsilon_F$  genau zwischen zwei Landau-Niveaus.

Unter der Annahme, dass die Anzahl der Zustände bei eingeschaltetem Magnetfeld erhalten bleibt, müssen alle Zustände, die bei ausgeschaltetem Magnetfeld über das Intervall  $\hbar\omega_c$  verteilt waren, nun *alle* die Energie  $\hbar\omega_c$  haben. Die Zustandsdichte  $D_L$  pro Landau-Niveau ist damit gegeben durch:

$$D_L = \hbar\omega_c D(B = 0) = 2n_L \quad (9)$$

wobei  $D(B = 0)$  die konstante Zustandsdichte im Intervall  $\hbar\omega_c$  ohne Einwirkung des Magnetfelds ist. Die Zahl der Zustände  $D_L$  pro Landau-Niveau (und pro Fläche) bestimmt

auch die maximal mögliche Anzahl der Elektronen, die in einem Landau-Niveau sein können. Wenn die Spinartung aufgehoben ist, können maximal  $2n_L$  Elektronen (pro Fläche) ein Landau-Niveau besetzen.  $n_L$  ist also die maximal mögliche zweidimensionale Ladungsträgerdichte pro Landau-Niveau und ist gegeben durch das Umstellen von (9):

$$n_L = \frac{eB}{h} = \frac{B}{\Phi_0} \quad (10)$$

wobei hier mit  $\Phi_0 = h/e = 4.136 \cdot 10^{-15}$  Vs der magnetische Flussquant eingeführt wurde. Die Zahl der Zustände  $N_L$  pro Landau-Niveau innerhalb der zum Magnetfeld orthogonal liegenden Probenfläche  $A$  ist damit:

$$N_L = \frac{B}{\Phi_0} A = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (11)$$

mit dem gesamten magnetischen Fluss  $\Phi = BA$  durch die Probenfläche hindurch.

Das Verhältnis der zweidimensionalen Ladungsträgerdichte  $n$  des 2DEG zur Ladungsträgerdichte  $n_L$  pro Landau-Niveau, wird als *Füllfaktor*  $i$  bezeichnet:

$$i = \frac{n}{n_L} = n \frac{\Phi_0}{B} \quad (12)$$

Die Anzahl  $i$  der gefüllten Landau-Niveaus wird zum Einen durch die Ladungsträgerdichte des 2DEG und zum Anderen durch das anliegende Magnetfeld bestimmt. Es gibt also grundsätzlich zwei Möglichkeiten die Landau-Niveaus zu besetzen:

1. Veränderung der Ladungsträgerdichte  $n$  bei konstant gehaltenem Magnetfeld. Durch das Verändern der Ladungsträgerdichte ändert sich die Fermi-Energie und damit die Anzahl der besetzten Landau-Niveaus. Die Ladungsträgerdichte wird experimentell mithilfe einer Gatespannung variiert [3]. Diese Methode kommt hier jedoch nicht zur Anwendung.
2. Veränderung des Magnetfelds  $B$  bei konstant gehaltener Ladungsträgerdichte. Dadurch wird der Abstand  $\hbar\omega_c$  der Landau-Niveaus verändert. Mit steigendem Magnetfeld durchlaufen die Landau-Niveaus die Fermi-Energie und werden 'entvölkert'. Da angenommen wird, dass die Ladungsträgerdichte konstant bleibt, müssen die Elektronen die niedrigeren Landau-Niveaus besetzen. Beim Füllfaktor  $i = 1$  befinden sich alle Elektronen im niedrigsten Landau-Niveau. Diese Methode, also die Variation des Magnetfelds zur Umbesetzung der Elektronen auf andere Landau-Niveaus, wird in dieser Arbeit ausgenutzt.

## 1.2 Einschränkungen durch die Probengeometrie

Im externen orthogonalen Magnetfeld wird ein Elektron, dessen Bewegung orthogonal zum Magnetfeld unterbunden ist, in einer zweidimensionalen Ebene Kreisbahnen durchlaufen. Bei einer geometrisch endlichen Ebene, wie die Corbino-Probe, kann sich die Kreisbahn nur unter bestimmten Bedingungen ausbilden, die durch die konkreten Abmessungen der Probe festgelegt sind. Dadurch sind nicht alle Kreisbahnradien erlaubt, was die möglichen Eigenschaften des Ladungsträgers (wie z.B. seine Energie) einschränkt.

Im Grunde können sich nur zwei Arten der Kreisbahn in einer Corbino-Geometrie ausbilden, die mit unterschiedlichen Bedingungen verknüpft sind. In dieser Arbeit werden diejenigen Kreisbahnen als *nicht-zusammenhängende* Kreisbahnen bezeichnet, die den Innenkontakt einschließen. Mit 'nicht-zusammenhängend' ist gemeint, dass die durch die Kreisbahn eingeschlossene Fläche keinen Innenkontakt (als ein Loch in der Kreisbahn) einschließt. Ihr Radius  $r$  ist größer als der Radius  $r_i$  des inneren Kontakts.

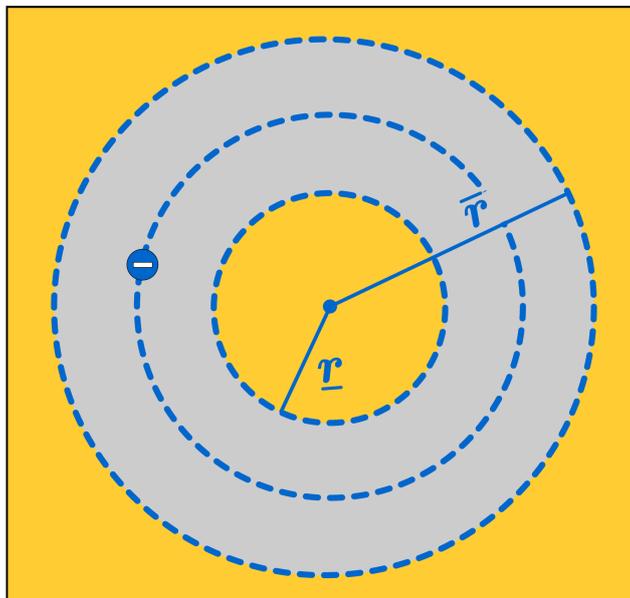


Abbildung 2: Veranschaulichung der gestrichelt dargestellten nicht-zusammenhängenden Kreisbahnen

Der kleinste Radius einer nicht-zusammenhängenden Kreisbahn ist durch den Radius des inneren Kontakts und der größte Radius ist durch den Radius des äußeren Kontakts festgelegt. Somit liegen die Radien der nicht-zusammenhängenden Kreisbahnen stets im Intervall:

$$r \in [r_i, r_e] \quad (13)$$

Konkret für die verwendeten Corbino-Proben also:  $r \in [640 \mu\text{m}, 1000 \mu\text{m}]$ .

Als *zusammenhängende Kreisbahnen* werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Kreis-

bahnen bezeichnet, deren Radius  $r$  kleiner ist als der Radius  $r_i$  des inneren Kontakts.

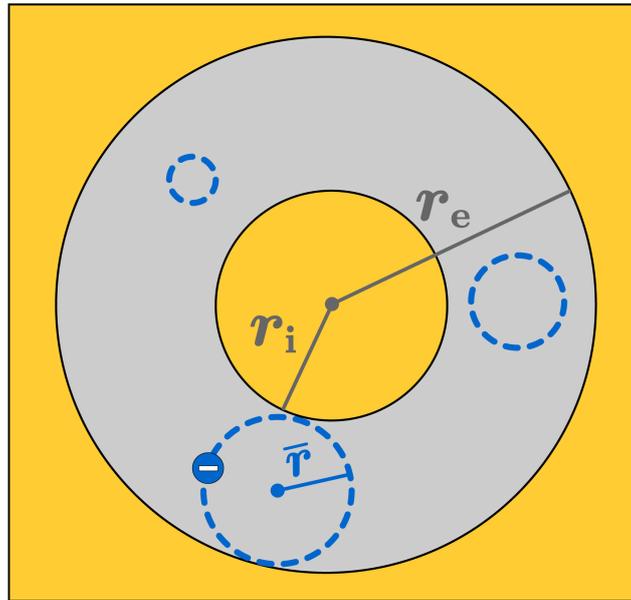


Abbildung 3: Veranschaulichung der gestrichelt dargestellten zusammenhängenden Kreisbahnen

Zusammenhängende Kreisbahnen können sich nur im Ring der Dicke  $r_e - r_i$  zwischen dem Innen- und Außenkontakt ausbilden. Folglich kann der größte Kreisbahnradius  $\bar{r}$  einer zusammenhängenden Kreisbahn nur die Hälfte der Breite dieses Rings sein, was durch eine einfache geometrische Überlegung ersichtlich ist:

$$\bar{r} = \frac{r_e - r_i}{2} \quad (14)$$

Der mögliche, größte Radius einer zusammenhängenden Kreisbahn ist also durch (14) begrenzt. Der kleinste Kreisbahnradius  $\underline{r}$  kann klassisch beliebig klein werden. Somit liegen die Radien zusammenhängender Kreisbahnen stets im Intervall:

$$r \in \left[ 0, \frac{r_e - r_i}{2} \right] \quad (15)$$

Konkret für die verwendeten Corbino-Proben also:  $r \in [0, 180 \mu\text{m}]$ .

Die nicht-zusammenhängenden Kreisbahnen sind bei kleineren Magnetfeldern und schnelleren Elektronen und die zusammenhängenden Kreisbahnen sind bei größeren Magnetfeldern und langsameren Elektronen relevant. Die Geschwindigkeit der Elektronen wird beispielsweise durch die Temperatur des 2DEG, durch die angelegte Quellspannung zwischen dem Innen- und Außenkontakt und durch das elektrische Feld innerhalb des Corbino-Rings. Ab einem kritischen Wert der Elektronengeschwindigkeit, bei dem sich

keine der beiden Kreisbahnarten ausbilden können, müsste der Quanten-Hall-Effekt verschwinden. Dies könnte die Interpretation der auftretenden Durchbruchspannung sein [4]. Wenn das stimmt, dann ist es eine weitere Bestätigung dafür, dass die ungestörte Kreisbahnbewegung der Elektronen für die Erklärung des Quanten-Hall-Effekts entscheidend ist.

Bei einer *realen* Probe spielen die Streuer (z.B. Verunreinigungen innerhalb des Corbino-Rings) bei der Entstehung der Kreisbahn ebenfalls eine Rolle. Mit der Ladungsträgerdichte der Größenordnung  $10^{-15} \text{ m}^{-2}$  und dem Fermi-Wellenvektor  $k_F = \sqrt{2\pi n}$  eines zweidimensionalen freien Elektronengases, lässt sich die Fermi-Geschwindigkeit eines Elektrons im 2DEG abschätzen:

$$v_F = \frac{\hbar}{m} \sqrt{2\pi n} \approx 130 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (16)$$

Zusammen mit der in dieser Arbeit bestimmten Streuzeit  $\tau_q$  in der Größenordnung von  $10^{-12} \text{ s}$  beträgt die mittlere freie Weglänge des Elektrons am Fermi-Niveau:

$$l_q = v_F \tau_q \approx 0.13 \mu\text{m} \quad (17)$$

Wie bereits diskutiert, muss das Elektron mindestens eine Kreisbahn ohne zu streuen durchlaufen haben, damit der QHE beobachtbar wird:  $\omega_c \tau_q > 1$ . Das heißt, klassisch gesehen muss die mittlere freie Weglänge  $l_q$  größer sein als der Umfang der Elektronenkreisbahn. Der kleinste Umfang einer nicht-zusammenhängenden Kreisbahn beträgt aber nach (13):  $2\pi r_i \approx 4000 \mu\text{m} \gg 0.13 \mu\text{m}$ . Folglich können die Elektronen, die um den Ring herumlaufen, nicht für den Quanten-Hall-Effekt verantwortlich sein. Das scheint aber offensichtlich zu sein, denn in einer Hallbar gibt es keinen großen Innenkontakt, um den die Elektronen herumlaufen könnten und trotzdem kann der QHE beobachtet werden. Das heißt jedoch nicht, dass nicht-zusammenhängende Kreisbahnen komplett ausgeschlossen sind, denn sie müssen nicht unbedingt um den inneren Kontakt entstehen, sondern können beispielsweise eine Störstelle im 2DEG oder gar ein Flussquant einschließen.

### 1.2.1 Radiuslücke

Da die Intervalle (15) und (13), die maximalen und minimalen Kreisbahnradien der Elektronen vorgeben, nicht übereinstimmen, sind alle Kreisbahnradien  $r$  im Intervall (Differenz von (15) und (13))

$$r \in \left[ r_i, \frac{r_e - r_i}{2} \right] \quad (18)$$

geometrisch verboten. Die geometrisch bedingte Radiuslücke  $\Delta r$  beträgt:

$$\Delta r = \frac{r_e - r_i}{2} - r_i = \frac{1}{2}(3r_i - r_e) \quad (19)$$

Die verwendete Geometrie der Probe legt somit den verbotenen Radiusbereich für die Kreisbahn fest. Das heißt: Alle physikalischen Größen, die von der Ausdehnung der Kreisbahnen (sprich vom Kreisbahnradius) abhängen, können nicht die durch die Geometrie vorgegebenen Radiusgrenzen überschreiten. Aus Gl. (19) kann herausgelesen werden, dass bei festgehaltenem Innenkontaktradius die Radiuslücke umso größer wird, je kleiner der Außenkontaktradius ist; also der Corbino-Ring möglichst schmal ist. Bei einer Corbino-Geometrie mit mindestens  $r_e = 3r_i$  verschwindet die Radiuslücke. Damit die Radiuslücke  $\Delta r = 0$  ist, muss die Probe die folgende geometrische Bedingung erfüllen:

$$r_e \geq 3r_i \quad (20)$$

Die Radiuslücke der verwendeten Corbino-Proben beträgt  $\Delta r = 460 \mu\text{m}$ . Das Verhältnis der Radien beträgt nur 1.6. Es wäre interessant zu untersuchen, wie sich das Fehlen der Radiuslücke sowie das Vorhandensein einer großen Radiuslücke auf die Magnetotransportmessungen auswirkt.

## 2 Experimentelle Grundlagen

Um den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt beobachten zu können, sind Temperaturen im mK-Bereich und hohe Magnetfelder notwendig. Deshalb wird im Folgenden vorgestellt, wie diese Bedingungen im Experiment realisiert werden.

### 2.1 Kryostat

Um große Magnetfelder, weit über 1 T zu erzeugen, wird ein Kryostat verwendet. Der prinzipielle Aufbau des verwendeten Kryostaten ist in Abbildung 4 skizziert.

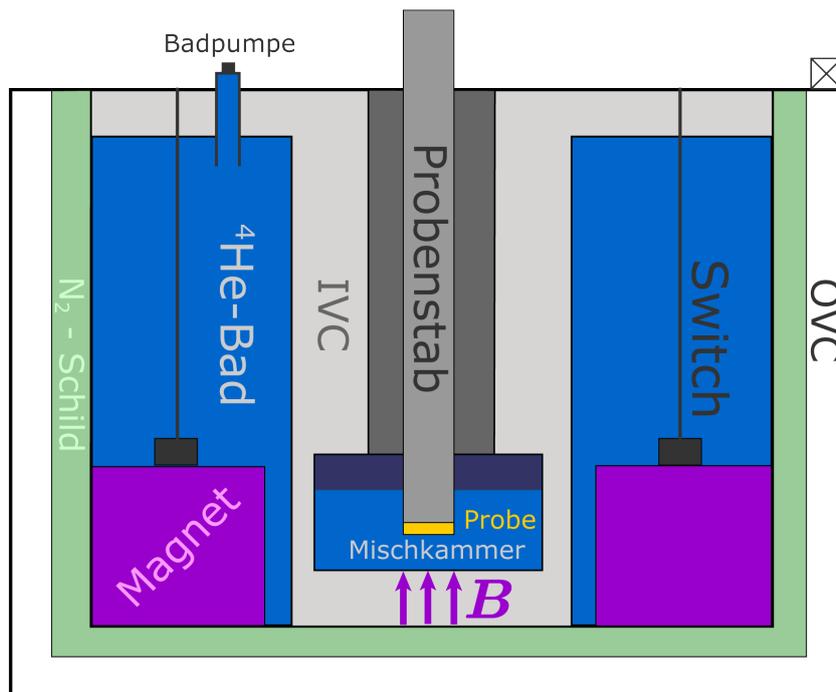


Abbildung 4: Prinzipieller Aufbau des verwendeten Kryostaten.

Im Inneren des Kryostaten befindet sich eine Magnetspule (Typ II Supraleiter NbTi), die in flüssiges Helium eingetaucht ist. Die Magnetspule wird so unter den Wert der kritischen Temperatur von ungefähr 10 K abgekühlt und dadurch supraleitend gemacht. Auf diese Weise konnten Magnetfelder bis zu einem kritischen Magnetfeld, ab dem die Supraleitung abbricht, von 15 T erzeugt werden.

Die Temperatur des flüssigen Heliums liegt bei 4.2 K, also deutlich unter der kritischen Temperatur von NbTi. So konnte die Magnetspule durch die tiefere Temperatur höhere Magnetfelder bis 18 T erreichen.

Es bestand auch die Möglichkeit, durch das Abpumpen des verdampften Heliums aus dem Heliumbad den Gasdruck zu reduzieren und damit eine noch niedrigere Temperatur von 2.2 K zu erreichen. Dies würde ein Magnetfeld von 20 T ermöglichen. Diese Möglichkeit

wurde jedoch nicht genutzt, da für das in dieser Arbeit relevante FQHE-Regime 18 T ausreichen.

Der verwendete Kryostat ist von einem  $N_2$  - Schild umgeben, also aus einer auf 77 K abgekühlten Schicht aus Stickstoff, die zur Reduzierung des Wärmeaustauschs mit der Umgebung dient.

## 2.2 Mischkryostat

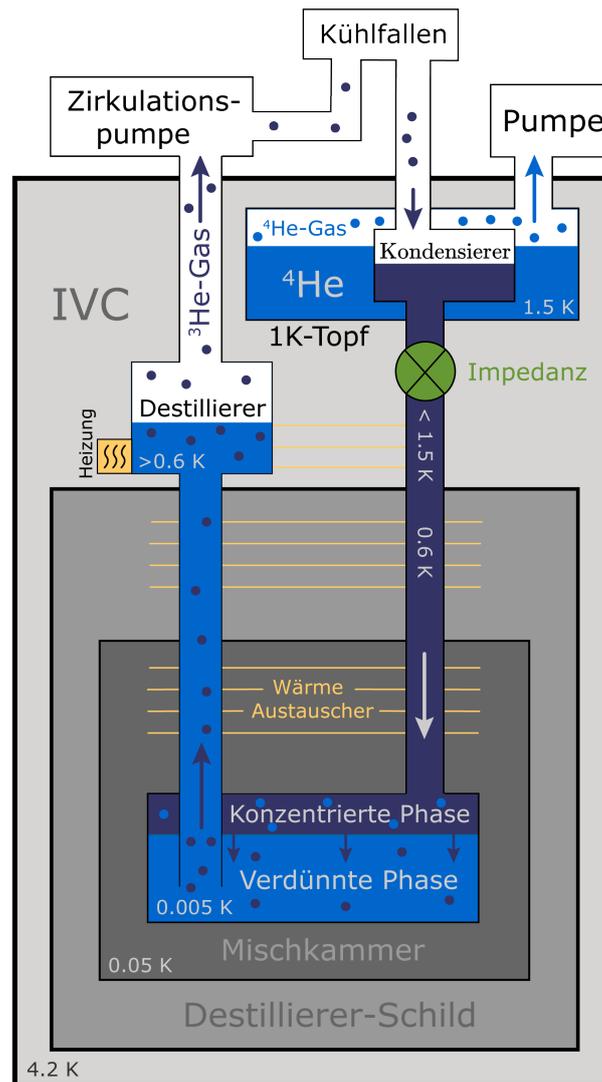


Abbildung 5: Prinzipieller Aufbau des verwendeten Mischkryostaten und sein Funktionsprinzip.

Im Kryostat befindet sich auch eine Mischkammer, in welche die Probe mithilfe eines Probenstabs eingelassen wird (siehe Abbildung 4). Die Probe ist so positioniert, dass die Richtung des Magnetfelds genau parallel zur Probenwachstumsrichtung zeigt und damit orthogonal zur Ebene, in der sich das zu untersuchende zweidimensionale Elektronengas

(2DEG) ausbildet.

In der Mischkammer wird mithilfe der  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Mischkühlung eine Temperatur von bis zu 10 mK erreicht, wobei diese mittels eines Heizelements bis zu 700 mK variiert wurde. Temperaturen im mK-Bereich sind notwendig, weil erst unter dieser Bedingung der FQHE beobachtet werden kann.

Die  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Mischkühlung nutzt aus, dass dem System bei Mischung der Helium-Isotope  $^3\text{He}$  und  $^4\text{He}$  die thermische Energie entzogen wird. Wenn die Temperatur unter 1 K fällt, zerfällt das  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Gemisch in zwei Phasen: In eine *konzentrierte* Phase, die hauptsächlich aus  $^3\text{He}$ -Isotopen besteht und in eine *verdünnte* Phase, die zum größten Teil aus  $^4\text{He}$ -Isotopen besteht. Da die konzentrierte Phase eine geringere Dichte hat, schwimmt sie auf der verdünnten Phase.  $^3\text{He}$ -Isotope aus der konzentrierten Phase treten über die Phasengrenzfläche in die verdünnte Phase ein, wobei für diesen Vorgang Energie aufgebracht werden muss, die der Kammerumgebung in Form von Wärme entzogen wird. Dadurch kühlt sich die verdünnte Phase ab und erreicht die gewünschten Temperaturen im mK-Bereich. Um den  $^3\text{He}$ -Konzentrationsunterschied in den beiden Phasen aufrechtzuerhalten, um die Mischkammer-Temperatur bis auf 10 mK zu reduzieren, muss das  $^3\text{He}$  aus der verdünnten Phase abgepumpt werden. Das abgepumpte  $^3\text{He}$  wird nach dem Durchlaufen von Wärmetauschern wieder der Mischkammer zugeführt.

## 2.3 Die untersuchte Probe

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit den Quanten-Hall-Effekt in unterschiedlichen Geometrien zu untersuchen. Die üblichsten Probengeometrien sind: Hall-, Corbino- und Van-der-Pauw-Geometrien.

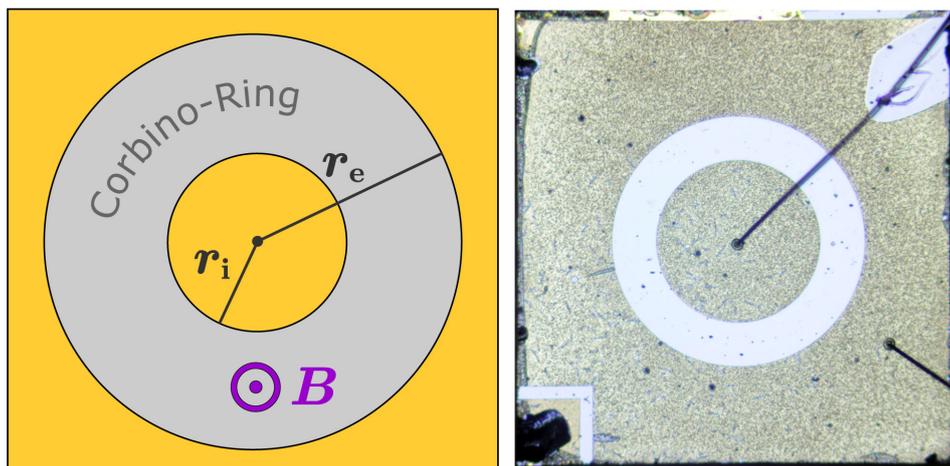


Abbildung 6: Links: Schematische Darstellung der Corbino-Geometrie. Rechts: Foto der verwendeten Corbino-Probe D031230A

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der QHE in einer Corbino-Geometrie untersucht. Wie in Abbildung 6 zu sehen ist, besteht sie aus einem inneren runden Kontakt mit dem

Radius  $r_i$  sowie aus einem äußeren Kontakt mit dem Radius  $r_e$ . Dazwischen befindet sich der aus GaAs bestehende Corbino-Ring, in dem das zweidimensionale Elektronengas untersucht wird. Ebenfalls ist die Ausrichtung des Magnetfelds bezüglich des Corbino-Rings angedeutet.

Es wurde die von L. Bockhorn hergestellte Corbino-Probe [5] mit der Bezeichnung D031230A verwendet. Der Innenkontakt der Probe wurde mit dem Kontakt 5 und der Außenkontakt mit dem Kontakt 10 des Chipalters mittels eines Bonders befestigt. Die Abbildung 6 zeigt diese Probe unter dem Mikroskop. Mit einem kalibrierten Maßstab wurden die Abmessungen bestimmt:  $r_i = 640 \mu\text{m}$  und  $r_e = 1000 \mu\text{m}$ .

Laut der Wachstumsstruktur der Probe ist die Ausdehnung des 2DEG in  $z$ -Richtung  $30 \text{ nm}$ [5]. Je nach dem, wie groß der Potentialtopf ist, kann die Elektronenwellenfunktion in den verbotenen Bereich eindringen, was in einer endlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons außerhalb des Potentialtopfes resultiert. Die Elektron-Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\Psi|^2$  außerhalb der GaAs-Schicht (2DEG), wird hier vernachlässigt, sodass die Elektronenmasse  $m$  als effektive Elektronenmasse in GaAs angenommen werden kann:  $m = 0.067 m_e$ , wobei  $m_e$  die Ruhemasse des Elektrons ist.

## 2.4 Messaufbau

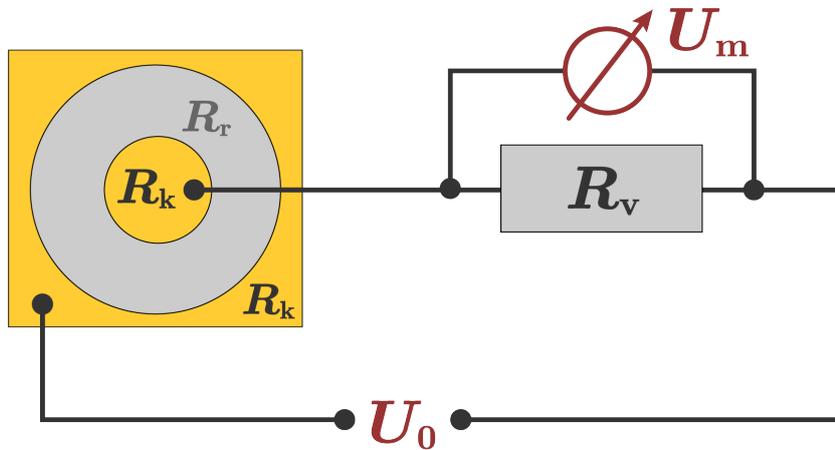


Abbildung 7: Schaltskizze mit eingezeichnetem Kontaktwiderstand  $R_k$ , Ringwiderstand  $R_r$ , Vorwiderstand  $R_v$ , der Quellspannung  $U_0$  und der Messspannung  $U_m$ .

Der Messaufbau ist in Abbildung 7 skizziert. Bei diesem Messaufbau handelt es sich um einen Spannungsteiler, für den gilt:

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{R_v}{R_c + R_v} \quad (21)$$

hierbei ist  $U_m$  die gemessene Spannung, die in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B$  untersucht wurde.  $U_0$  ist die angelegte Quellspannung,  $R_v$  ist ein Vorwiderstand und  $R_c$  ist

der Widerstand der Corbino-Probe inklusive Leitungswiderstände. Aus (21) kann der Corbino-Widerstand berechnet werden:

$$R_c = R_v \left( \frac{U_0}{U_m} - 1 \right) \quad (22)$$

Da der Corbino-Widerstand  $R_c$  sich aus dem Ringwiderstand  $R_r$  und dem Kontaktwiderstand  $R_k$  (inklusive Leitungswiderstände) zusammensetzt, wurde eine Messreihe der Leitungswiderstände vom Kontakt 5 und 10 der Probe D031230A aufgenommen. Die Leitungswiderstände verlaufen entlang des Probenstabs von dem Probenkontakt bis zum Anschlusspult. Die Messung ergibt im Mittel den Wert  $543 \Omega$ . Der gemessene Leitungswiderstand entspricht ungefähr dem Corbino-Widerstand  $R_c$  bei  $B = 0$ , weshalb der Leitungswiderstand als der gesamte Kontaktwiderstand  $R_k \approx 543 \Omega$  angenommen wird. Da der Ringwiderstand  $R_r$  im Magnetfeld deutlich überwiegt, ist es eine gute Näherung. Der Ringwiderstand bei  $B = 0$  ist gegeben durch:

$$R_r(0) \approx R_c(0) - 543 \Omega \quad (23)$$

Der Ringwiderstand in Abhängigkeit vom Magnetfeld ist dann:

$$R_r(B) \approx R_v \left( \frac{U_0}{U_m(B)} - 1 \right) - 543 \Omega \quad (24)$$

Gemessen wurde mittels der Lock-in-Technik. Dabei wird in einen Lock-in-Verstärker das Messsignal eingespeist. Dieser überlagert dann das Messsignal mit einem Referenzsignal, dessen Frequenz und Phase eingestellt werden können. Das überlagerte Signal und das Referenzsignal multipliziert der Lock-in-Verstärker und integriert sie in einem Tiefpass. Auf diese Weise liefert der Lock-in-Verstärker nur dann ein Ausgangssignal, wenn die Frequenz des Messsignals und des Referenzsignals übereinstimmen. Messsignale, aber auch Rauschsignale mit anderen Frequenzen, werden herausgefiltert. Durch das Lock-in-Messprinzip wird ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis im Gegensatz zu einer Gleichstrommessung erreicht. Die gemessene Spannung  $U_m$  ist also ein Effektivwert.

Das Ansteuern der Geräte sowie das Auslesen der Messwerte erfolgt mit der Programmiersprache Python.

In dieser Arbeit wurde  $13.13 \text{ Hz}$  als die Frequenz des Referenzsignals gewählt, weil sie möglichst weit weg von dem Frequenzbereich liegt, in dem die meisten Störfrequenzen zu finden sind und dadurch eine kleinere Integrationszeit ausreichend ist, um die Störsignale zu eliminieren. Am Lock-in-Verstärker wurde eine Quellspannung  $U_0$  eingestellt, die im  $\text{mV}$ -Bereich lag. An einem in Reihe mit der Corbino-Probe geschaltetem Vorwiderstand  $R_v$  wurde die abfallende Spannung  $U_m$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld gemessen. Zur Untersuchung des Magnetotransports bei kleinen Magnetfeldern wurde  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$

und bei größeren Magnetfeldern  $R_v = 110\text{k}\Omega$  gewählt. Nach der Gleichung (24) wird bei einem größeren Vorwiderstand der Ringwiderstand größer, was die Ausprägung der Messkurve verändert. Durch die Wahl eines kleineren Vorwiderstandes ist der im fünften Kapitel behandelte Drude-Verlauf der Konduktivität ausgeprägter und damit leichter zu untersuchen.

### 3 Magnetotransportmessungen

Im Folgenden werden Messungen dargestellt, bei denen die radiale Konduktivität  $\sigma$  der Corbino-Probe bei Magnetfeldern  $B$  im Bereich von  $-1$  T bis  $18$  T untersucht wurde. Die radiale Konduktivität der Probe wurde hierbei mithilfe des Ringwiderstands (24) ausgedrückt (siehe Anhang A):

$$\sigma(B) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \frac{1}{R_r(B)} \quad (25)$$

Anschließend wird das Verhalten von  $\sigma$  bei unterschiedlichen Temperaturen  $T_m$  des Mischkryostaten dargestellt. Außerdem werden zu jeder Messung Beobachtungen festgehalten, die im nächsten Kapitel genauer analysiert werden.

#### 3.1 Magnetfeldabhängigkeit der Konduktivität

##### 3.1.1 Magnetfeldabhängigkeit von $-1$ T bis $1$ T

Die Messung der Konduktivität  $\sigma$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B$  von  $-1$  T bis  $1$  T, bei  $200$  mK, ist in Abbildung 8 dargestellt.

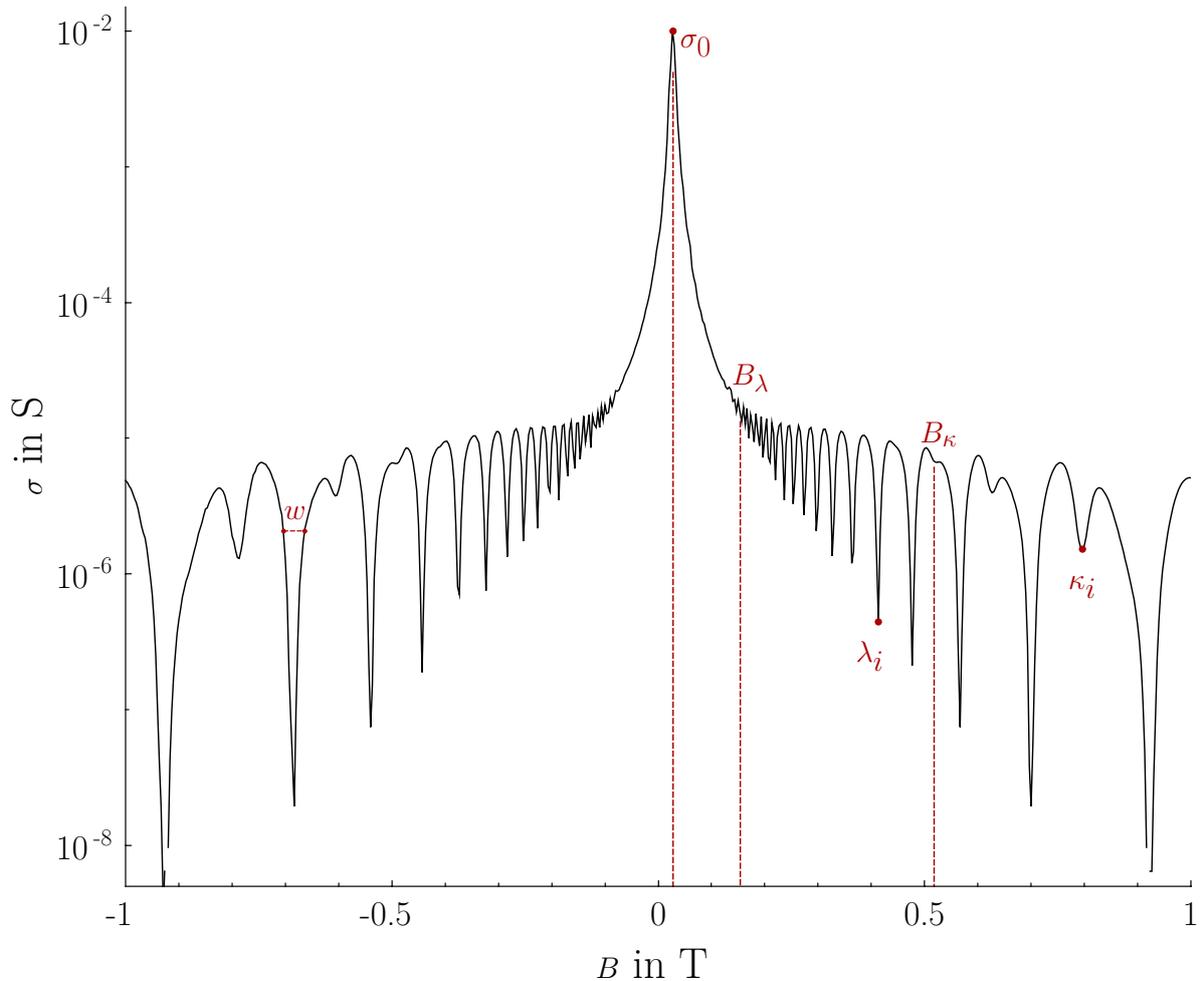


Abbildung 8: Konduktivität im Magnetfeldbereich zwischen  $-1$  T bis  $1$  T bei  $200$  mK. Die  $\sigma$ -Achse ist logarithmisch skaliert. Einige wichtige Größen sind eingezeichnet. Parameter:  $U_0 = 1$  mV,  $R_v = 2.2$  k $\Omega$ .

An der Abbildung 8 wurden folgende Beobachtungen gemacht:

**Beobachtung B1:** Die  $\sigma(B)$ -Kurve ist um das globale Maximum  $\sigma_0$  symmetrisch.

**Beobachtung B2:** Das globale Maximum  $\sigma_0$  liegt nicht genau bei  $B = 0$ , sondern ist um ungefähr  $0.03$  T verschoben. Außerdem wurde beobachtet, dass der  $\sigma(B)$ -Verlauf in die andere Richtung verschoben war, wenn das Magnetfeld nicht von  $1$  T bis  $-1$  T geändert wurde, sondern von  $-1$  T bis  $1$  T.

**Beobachtung B3:** Ab  $B_\lambda \approx 0.15$  T relativ zum Koordinatenursprung fängt die  $\sigma(B)$ -Kurve an zu oszillieren. Hier werden die Minima der Oszillationen als Minima *erster Art* bezeichnet.

**Beobachtung B4:** Vom globalen Maximum bis  $B_\lambda$  fällt die mittlere Konduktivität  $\langle \sigma \rangle$

ungefähr um den Faktor 530 ab. Im nachfolgenden gleichen Magnetfeldintervall fällt sie dagegen gerade mal um den Faktor 2 ab. Mit steigendem Magnetfeld fällt  $\langle\sigma\rangle$  immer weiter ab.

**Beobachtung B5:** Die Minima  $\lambda_i(B_i)$  erster Art werden mit steigendem Magnetfeld tiefer. Hierbei ist  $\lambda_i$  die Konduktivität und  $B_i$  das Magnetfeld des  $i$ -ten Minimums erster Art.

**Beobachtung B6:** Die Breite  $w$  der auftretenden Täler erster Art, bei einem festen  $\sigma$ -Wert, nimmt mit steigendem Magnetfeld zu.

**Beobachtung B7:** Ab  $B_\kappa = 0.517\text{ T}$  treten neuartige Minima auf, die von Beobachtung B5 abweichen und die von nun als Minima *zweiter Art* bezeichnet werden. Hierbei ist  $B_\kappa$  der Magnetfeldwert des ersten auftretenden Minimums zweiter Art.

**Beobachtung B8:** Die Minima  $\kappa_i(B_i)$  zweiter Art werden mit steigendem Magnetfeld tiefer. Hierbei ist  $\kappa_i$  die Konduktivität und  $B_i$  das Magnetfeld des  $i$ -ten Minimums zweiter Art.

**Beobachtung B9:** Die durch die Minima zweiter Art entstandenen benachbarten Berge sind leicht gekippt. Bei negativem Magnetfeld sind sie entgegengesetzt gekippt. Außerdem ist der linke Berg höher als der rechte, was deutliche zu sehen ist, wenn die  $\sigma$ -Achse nicht logarithmisch skaliert wird.

### 3.1.2 Magnetfeldabhängigkeit bis 18 T

Die Messung der Konduktivität  $\sigma$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld von 1 T bis 7 T ist in Abbildung 9 dargestellt. In Abbildung 10 wird  $\sigma$  von 7 T bis zum experimentell maximal möglichen Wert 18 T dargestellt.

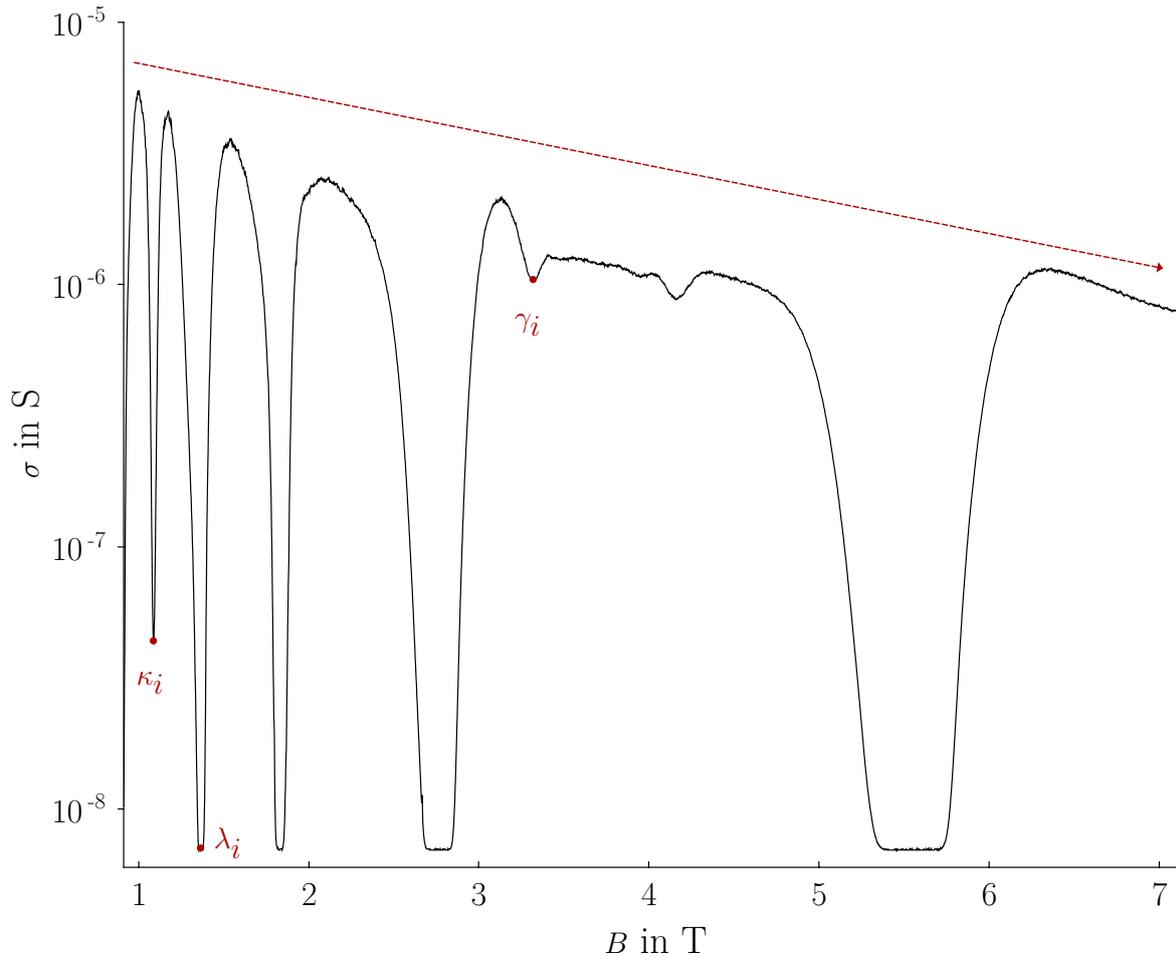


Abbildung 9: Konduktivität  $\sigma$  im Magnetfeldbereich von 1 T und 7 T bei 200 mK. Die Punktmarkierungen stellen Minima erster, zweiter und dritter Art dar. Angedeutet ist auch der mittlere Abfall der Konduktivität. Die  $\sigma$ -Achse wurde zur besseren Übersicht logarithmisch skaliert. Parameter:  $U_0 = 1$  mV,  $R_v = 110$  k $\Omega$ .

An der Abbildung 9 wurden folgende Beobachtungen gemacht:

**Beobachtung B10:** Die mittlere Konduktivität  $\langle \sigma \rangle$  fällt weiterhin mit steigendem Magnetfeld ab.

**Beobachtung B11:** Die Minima  $\lambda_i(B_i)$  erster Art und Minima  $\kappa_i(B_i)$  zweiter Art werden weiterhin mit steigendem Magnetfeld tiefer. Jedoch liegen die Minima bei höheren Magnetfeldern außerhalb der Auflösung des verwendeten Lock-in-Verstärkers, sodass sie aufgrund dieses Messartefakts verbreitert erscheinen.

**Beobachtung B12:** Bei  $B_\gamma = 3.323$  T tritt ein Minimum auf, das weder ein Minimum erster Art noch ein Minimum zweiter Art ist, weil es nicht die Beobachtung B5 oder B8 erfüllt. Bei höherem Magnetfeld treten weitere neuartige Minima  $\gamma_i(B_i)$  auf, die ebenfalls nicht die Beobachtung B5 oder B6 erfüllen. Solche Minima werden als Minima *dritter Art*

bezeichnet.

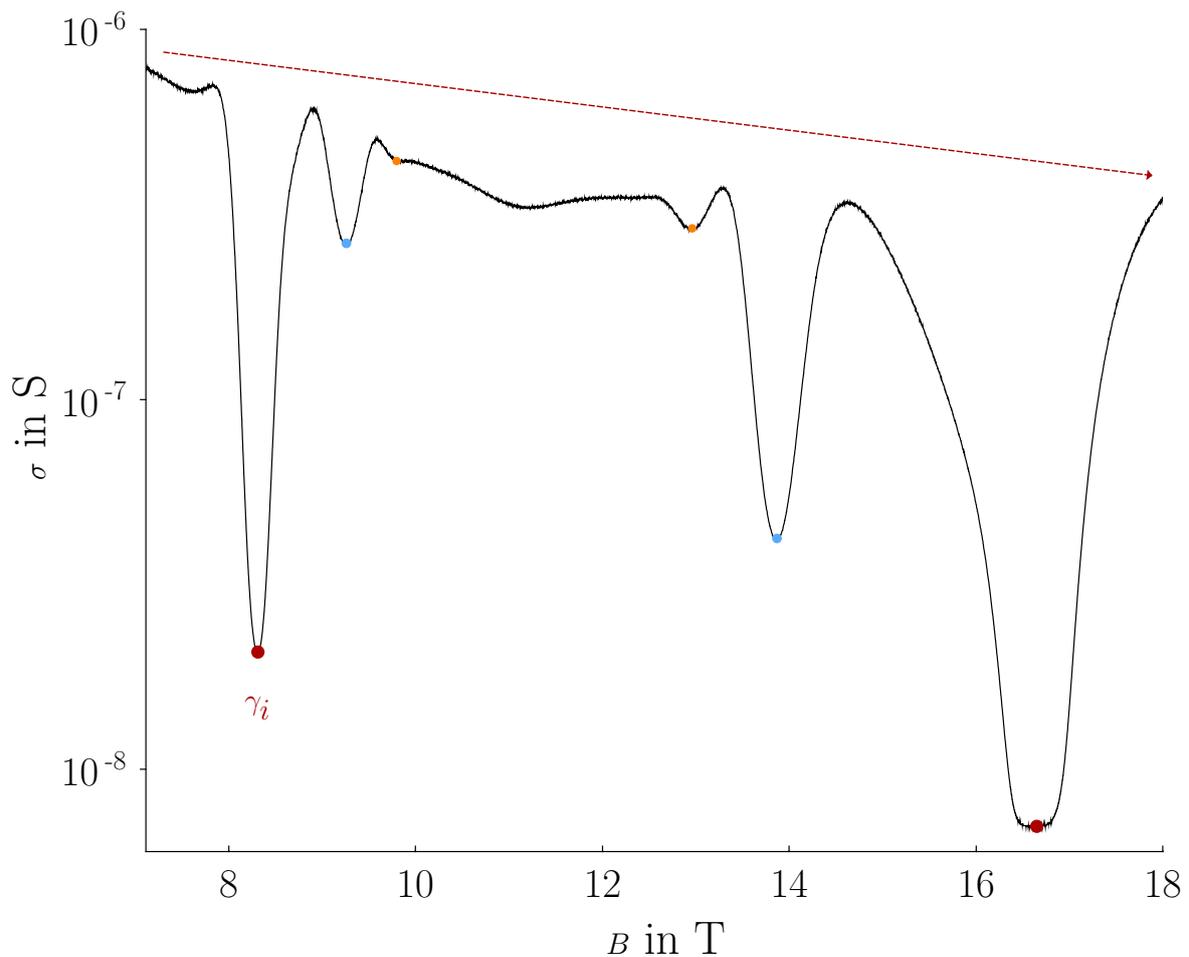


Abbildung 10: Konduktivität  $\sigma$  im Magnetfeldbereich zwischen 7 T und 18 T bei 200 mK. Gleichfarbige Markierungen stellen Minimapaare dritter Art dar. Die  $\sigma$ -Achse wurde zur besseren Übersicht logarithmisch skaliert. Parameter:  $U_0 = 1$  mV,  $R_v = 110$  k $\Omega$ .

An dem Messdiagramm 10 wurde eine weitere folgende Beobachtung gemacht:

**Beobachtung B13:** Die Minima  $\gamma_i(B_i)$  dritter Art werden in ihrer Gesamtheit nicht mit steigendem Magnetfeld tiefer, so wie das bei Minima erster und zweiter Art der Fall ist (siehe B5 und B8). Eine zunehmende Tiefe der Minima dritter Art mit steigendem Magnetfeld, ist nur bei Minimapaaren zu beobachten. Diese Paare folgen nicht direkt aufeinander, sondern schließen andere Minimapaare ein. Siehe Markierungen in der Abbildung 10.

### 3.2 Temperaturabhängigkeit der Konduktivität

Im Folgenden werden Temperaturmessungen der  $\sigma(B)$ -Kurve vorgestellt. Bei niedrigen (einstellbaren) Temperaturen  $T_m$  des Mischkryostaten muss beachtet werden, dass  $T_m$

nicht mit der Temperatur  $T_e$  der GaAs-Schicht, in der das 2DEG ist, übereinstimmen muss. Denn bei sehr niedrigen Temperaturen sind die Gitterschwingungen 'ausgefroren', sodass keine thermische Kopplung zwischen dem Mischkryostaten und der GaAs-Schicht vorhanden ist. Dies muss bei Untersuchungen der  $\sigma(B)$ -Kurve bei niedrigen Temperaturen des Mischkryostaten beachtet werden.

### 3.2.1 Temperaturabhängigkeit bis 1 T

In Abbildung 11 ist die Konduktivität  $\sigma$  des Corbino-Rings logarithmisch in Abhängigkeit vom Magnetfeld für vier unterschiedliche Temperaturen des Mischkryostaten aufgetragen.

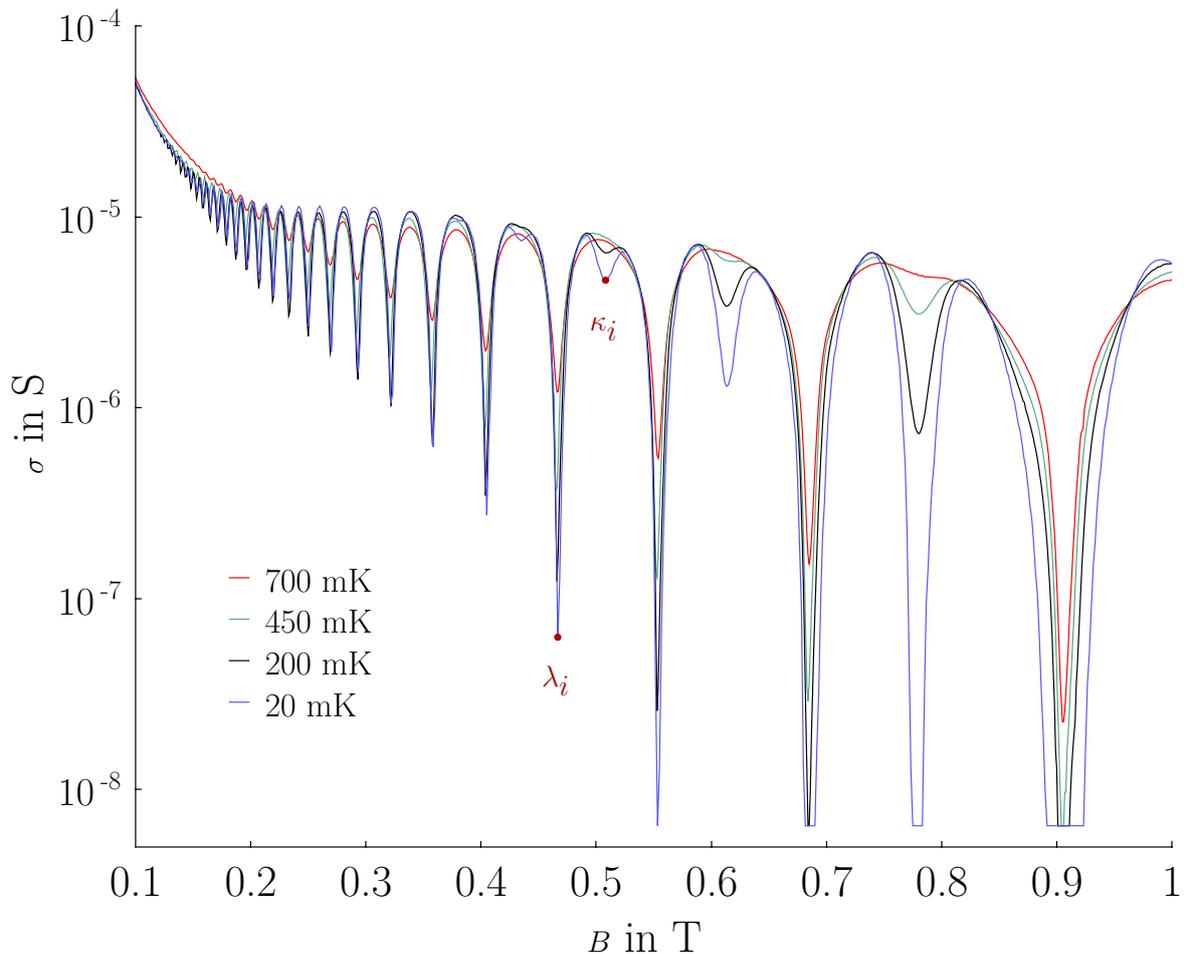


Abbildung 11: Temperaturabhängigkeit der Konduktivität von 0,1 T bis 1 T für vier verschiedene Temperaturen. Parameter:  $R_v = 2,2 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

An der Temperaturmessung der Konduktivität können folgende Beobachtungen gemacht werden:

**Beobachtung B14:** Das Magnetfeld  $B_\lambda$ , bei dem die Oszillationen beginnen, verschiebt sich zu höheren Werten hin, wenn die Temperatur zunimmt.

**Beobachtung B15:** Das Magnetfeld  $B_{\kappa}$ , bei dem das erste Minimum zweiter Art auftritt, verschiebt sich mit zunehmender Temperatur zu größeren Werten hin.

**Beobachtung B16:** Sowohl die Minima  $\lambda_i$  erster Art als auch die Minima  $\kappa_i$  zweiter Art werden mit sinkender Temperatur tiefer.

**Beobachtung B17:** Die Breite  $w$  der Minima nimmt mit sinkender Temperatur zu.

### 3.2.2 Temperaturabhängigkeit bis 18 T

Abbildung 12 zeigt den  $\sigma(B)$ -Verlauf für vier verschiedene Temperaturen im Bereich zwischen 1 T und 7 T. Abbildung 13 zeigt den  $\sigma(B)$ -Verlauf von 7 T und 18 T.

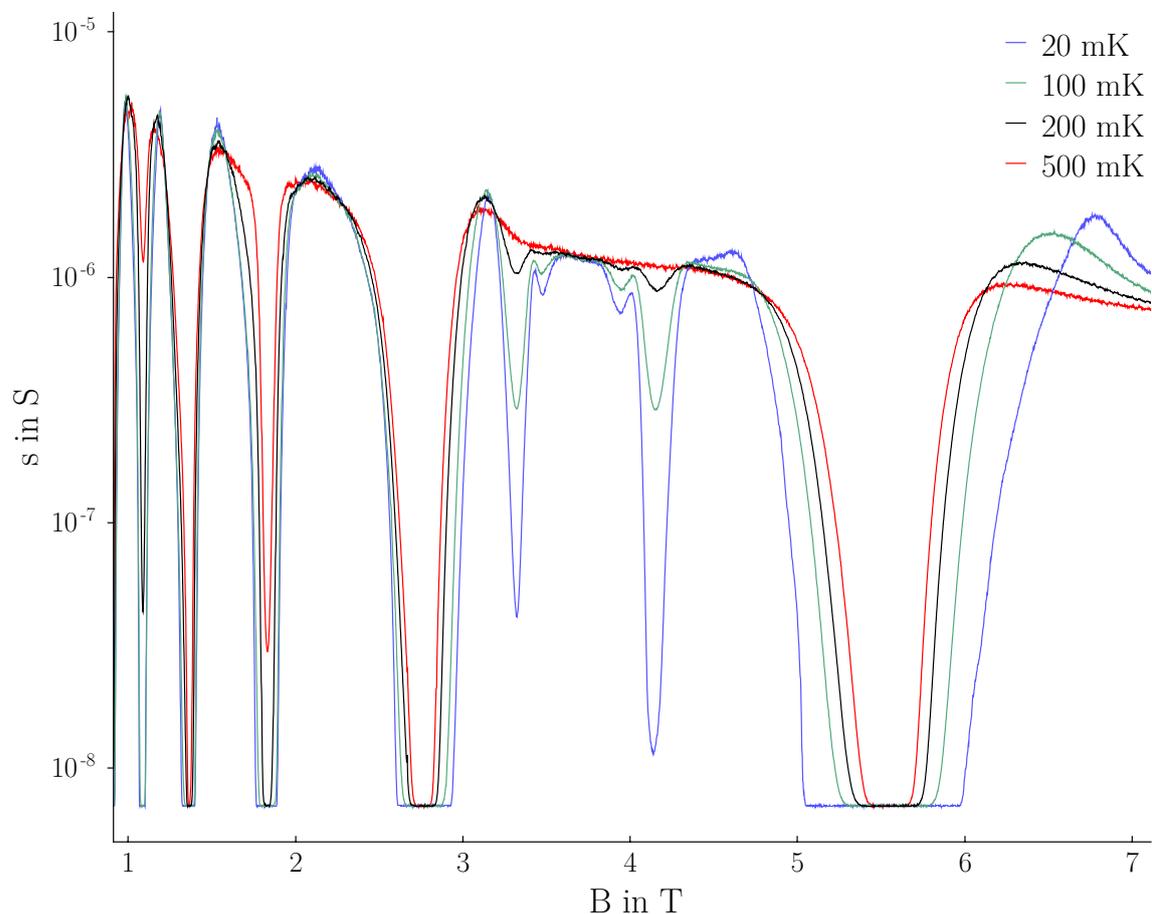


Abbildung 12: Temperaturabhängigkeit der Konduktivität von 1 T bis 7 T für vier verschiedene Temperaturen. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

An den Messungen 12 und 13 wurden folgende Beobachtungen gemacht:

**Beobachtung B18:** Die Breite  $w$  der Minima wird größer mit sinkender Temperatur.

**Beobachtung B19:** Alle Minima  $\lambda_i$ ,  $\kappa_i$  und  $\gamma_\nu$  werden mit sinkender Temperatur tiefer.

**Beobachtung B20:** Mit sinkender Temperatur treten weitere Minima dritter Art auf.

**Beobachtung B21:** Die  $\sigma(B)$ -Kurve ist im Bereich zwischen 10 T und 12 T temperaturunabhängig, trotz eines erkennbaren Minimums innerhalb dieses Bereichs.

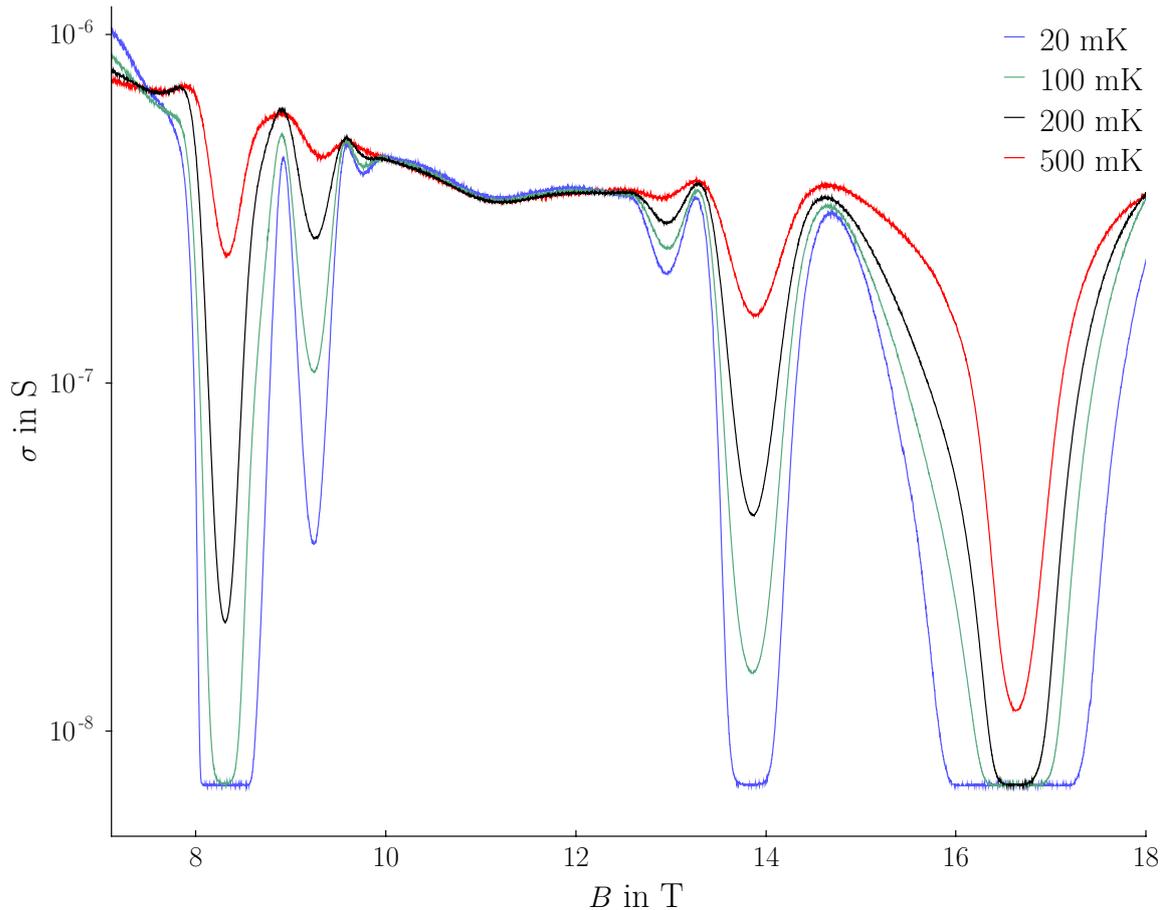


Abbildung 13: Temperaturabhängigkeit der Konduktivität von 7 T bis 18 T für vier verschiedene Temperaturen. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Während der Messung wurde festgestellt, dass die Temperatur  $T_m$  des Mischkryostaten mit dem ansteigenden Magnetfeld von der Basistemperatur 10 mK bis zu 50 mK ansteigt. Mit dem sinkenden Magnetfeld fällt die Temperatur wieder auf die Basistemperatur ab. Diese Beobachtung kann auf den magnetokalorischen Effekt zurückgeführt werden; wird jedoch nicht in dieser Arbeit berücksichtigt.

## 4 Analyse der Beobachtungen

Vor der eigentlichen Auswertung ist zunächst festzuhalten, dass der nahezu konstante Magnetfeldoffset (Beobachtung B2) auf die Hysterese des supraleitenden Magneten zurückgeführt werden kann. Der Wert des Offsets (ungefähr  $\pm 0.03$  T) entspricht dann dem positiven bzw. negativen Remanenzfeld, je nach dem, in welche Richtung die Messung durchlaufen wird.

### 4.1 Konduktivität bis 0.1 T

Im Bereich kleiner Magnetfelder, wo die  $\sigma(B)$ -Kurve symmetrisch um das globale Maximum  $\sigma_0$  abfällt, kann das Drude-Modell zur Erklärungen der Beobachtungen B1 und B4 herangezogen werden. Dazu wird die radiale Drude-Konduktivität (siehe Anhang B)

$$\sigma(B) = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{e\tau}{m} \right)^2 B^2 \right]^{-1} \quad (26)$$

mit der gemessenen Konduktivität bei kleinen Magnetfeldern verglichen. Hierbei ist

$$\sigma_0 = \sigma(B = 0) = \frac{n e^2 \tau}{m} \quad (27)$$

das globale Konduktivitätsmaximum bei ausgeschaltetem Magnetfeld und  $m = 0.067 m_e$ . Dabei wird angenommen, dass die Streuzeit  $\tau$  im untersuchten Magnetfeldbereich unabhängig vom Magnetfeld ist.

Die Messkurve wurde im Bereich zwischen  $-0.07$  T und  $0.1$  T mit der Drude-Formel (26) gefittet und in Abbildung 14 dargestellt. Das Maximum  $\sigma_0 = 10.15$  mS wurde aus der Messung abgelesen und damit die Streuzeit  $\tau = (78.5 \pm 0.8)$  ps als Fit-Parameter bestimmt. Der bestimmte Wert für die Streuzeit ist nur eine obere Grenze für die tatsächliche Streuzeit, denn es wurden nur die Leitungswiderstände, aber nicht die Innen- und Außenkontaktwiderstände berücksichtigt. Diese sind zwar bei größerem Magnetfeld vernachlässigbar, jedoch nicht bei kleinen Magnetfeldern, die zur Bestimmung von  $\tau$  betrachtet wurden. Mit Berücksichtigung der Kontaktwiderstände wäre  $\sigma_0$  kleiner und nach der Gl. (27) auch die Streuzeit und andere damit verbundene physikalische Größen. Die von B.A. Schmidt *et al.* auf eine ähnliche Weise bestimmte Streuzeit in einer Corbino-Probe ergibt einen um den Faktor 12 größeren Wert [6], was dazu beigetragen hat, dass sie mehr Minima beobachten konnten.

Aus der Gl. (27) kann außerdem die zweidimensionale Ladungsträgerdichte grob bestimmt werden:  $n = 4.47 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Des Weiteren kann die Mobilität  $\mu$  mithilfe der Streuzeit abgeschätzt werden:

$$\mu = \frac{e}{m} \tau = 2.06 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \quad (28)$$

Zu beachten ist bei der ermittelten Mobilität, dass in sie nicht nur der Fehler wegen der Streuzeit eingeht, sondern dieser Wert im Allgemeinen auch nicht der Mobilität bei  $B = 0$  entsprechen muss. In einer Corbino-Probe ist die Bestimmung von  $\mu(B = 0)$  schwierig, weil hier die nicht einfach herausrechenbaren Innen- und Außenkontaktwiderstände den ermittelten Wert für die Mobilität verfälschen und die Annahme erforderlich ist, dass die Streuzeit keine Magnetfeldabhängigkeit aufweist.

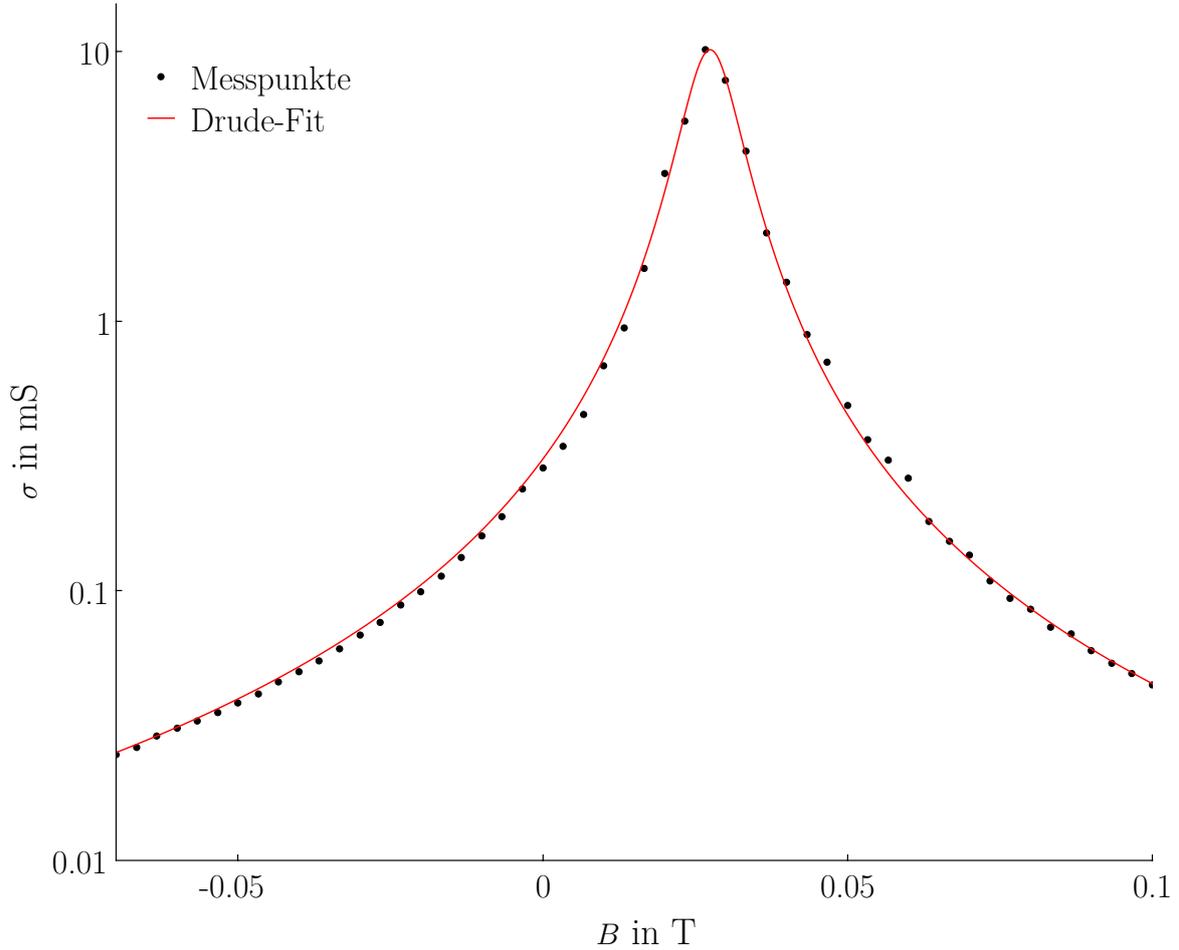


Abbildung 14: Logarithmisch skaliertes Fit der gemessenen Leitfähigkeit von  $-0.07$  T bis  $0.1$  T mittels der Drude-Leitfähigkeit. Parameter:  $T_m = 200$  mK,  $U_0 = 1$  mV,  $R_v = 2.2$  k $\Omega$ .

Die ermittelten Werte für die Streuzeit  $\tau$  und Leitfähigkeit  $\sigma_0$  wurden außerdem dazu benutzt, um die nicht-diagonale Komponente  $\sigma_{12}$

$$\sigma_{12} = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{e\tau}{m} \right)^2 B^2 \right]^{-1} \omega_c \tau \quad (29)$$

des Leitfähigkeitstensors mit der diagonalen Komponente  $\sigma$  ( $= \sigma_{11}$ ) des Leitfähigkeitstensors zu vergleichen. Das Ergebnis ist in Abbildung 15 zu sehen.  $\sigma_{12}$  entspricht in der Hall-Geometrie der Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  (siehe Anhang B). Diese Größe ist in der

Corbino-Geometrie nicht direkt messbar, weil sie im Gegensatz zu einer Hall-Bar keine Kontakte für die Messung der Querspannung enthält. Theoretisch zeigt  $\sigma_{12}$  näherungsweise ein lineares und  $\sigma$  ein konstantes Verhalten bis ungefähr 1 mT vom Nullpunkt aus, was im klassischen Fall zu erwarten ist.

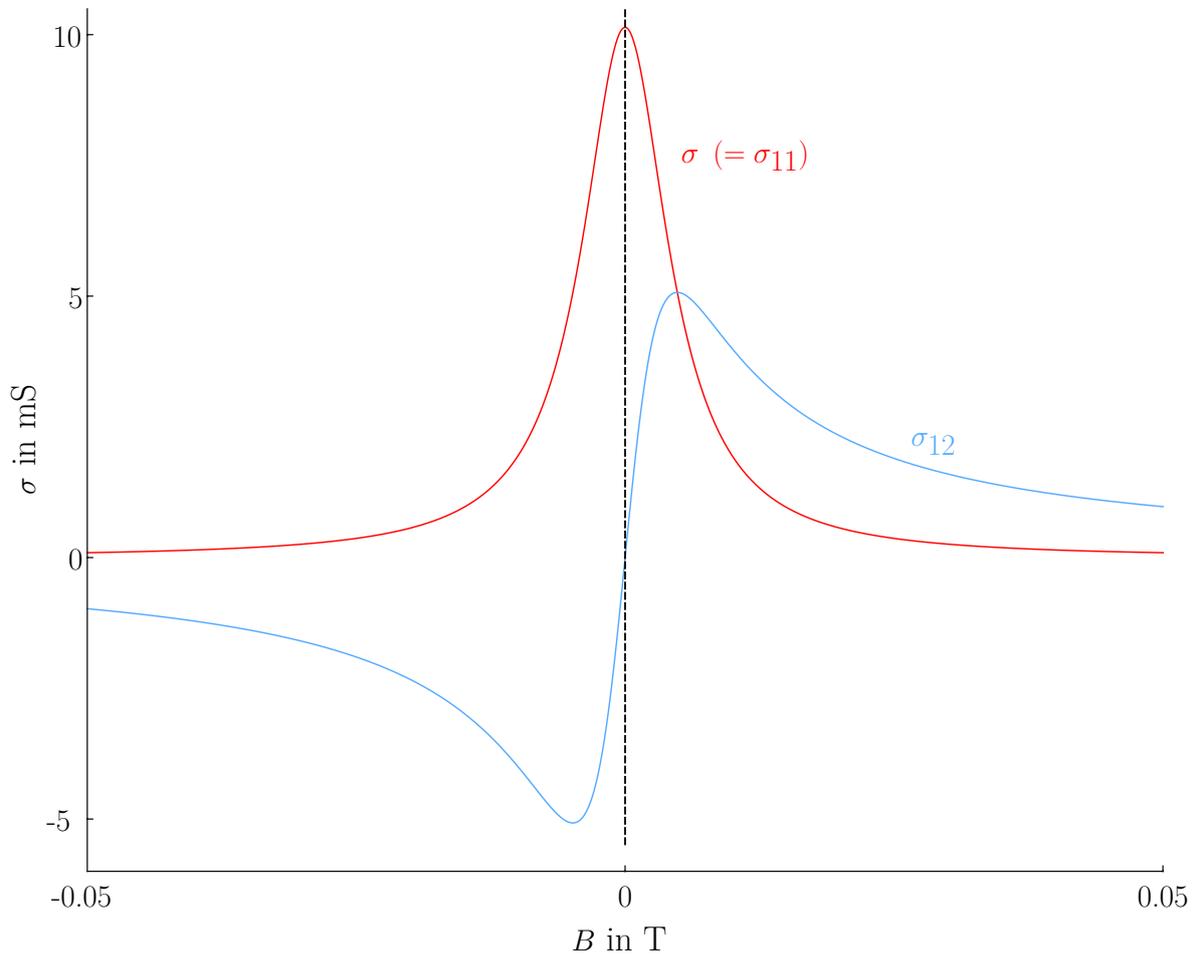


Abbildung 15: Vergleich der Diagonalkomponente  $\sigma$  mit der Nicht-Diagonalkomponente  $\sigma_{12}$  des Konduktivitätstensors  $\hat{\sigma}$  in  $j_{2d} = \hat{\sigma} E$ .

## 4.2 Die Amplitude der Konduktivitätskurve

Die Oszillationsamplitude  $A_\sigma$  der auftretenden Oszillationen (siehe Abb. 16 oben rechts) nimmt mit steigendem Magnetfeld ab. Sie kann dazu benutzt werden, die Quantenstreuzeit  $\tau_q$  zu bestimmen. Der Unterschied zu der mittels der Drude-Formel ermittelten Streuzeit (Transportstreuzeit) ist, dass die Quantenstreuzeit [7]

$$\frac{1}{\tau_q} = \int_0^\pi Q(\theta) d\theta \quad (30)$$

Streuprozesse in alle Richtungen gleich gewichtet, während die Transportstreuzeit

$$\frac{1}{\tau} = \int_0^\pi Q(\theta) [1 - \cos(\theta)] d\theta \quad (31)$$

welche normalerweise für die Berechnung der Mobilität benutzt wird, Kleinwinkelstreuung weniger gewichtet. Hierbei ist  $\theta$  der Streuwinkel und  $Q(\theta)$  ist eine Funktion, die proportional zur Wahrscheinlichkeit für die Streuung unter dem Winkel  $\theta$  ist.

Während die Qualität der Probe bezüglich des Ladungstransports (hier vom Innen- zum Außenkontakt der Probe) bei ausgeschaltetem Magnetfeld gut durch die Transportstreuzeit charakterisiert wird, sagt die Transportstreuzeit weniger etwas über die Beobachtbarkeit des QHE aus als die Quantenstreuzeit. Denn für die Beobachtbarkeit des QHE ist nicht die Qualität des Ladungstransports von A nach B relevant, sondern die ungestörte Kreisbewegung der Elektronen; festgelegt durch die Bedingung  $\omega_c \tau > 1$ . Dafür spielt auch Kleinwinkelstreuung eine Rolle, denn die Bewegungsrichtung des Elektrons bleibt bei einer Kreisbewegung nicht gleich. Es gibt also keinen Anlass, die Kleinwinkelstreuung anders zu behandeln. Deshalb muss für die Feststellung der Qualität der Probe bezüglich der Beobachtbarkeit des QHE, die Quantenstreuzeit betrachtet werden bzw. die mit der Quantenstreuzeit ermittelte Mobilität  $\mu_q = e \tau_q / m$ .

Zur Bestimmung der Quantenstreuzeit wird die folgende Beziehung für die Amplitude benutzt [7]:

$$A_\sigma = 4 \sigma_0 X(T) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_q}\right) \quad (32)$$

hierbei ist  $X(T)$  ein temperaturabhängiger Dämpfungsfaktor:

$$X(T) = \frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \sinh\left(\frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c}\right) \quad (33)$$

Dieser berücksichtigt die Dämpfung der Oszillationen bei der Temperatur  $T$  des 2DEG. Die Quantenstreuzeit ergibt sich aus der Linearisierung der Gl. (32):

$$\ln\left(\frac{A_\sigma}{X(T)}\right) = \ln(4 \sigma_0) - \frac{\pi m}{e \tau_q} \frac{1}{B} \quad (34)$$

Die Abbildung 16 zeigt die logarithmisch aufgetragene Oszillationsamplitude in Abhängigkeit von  $1/B$  für vier verschiedene Temperaturen. Die Kurven sind bei kleinen Amplituden näherungsweise linear. Dieses lineare Verhalten wurde mittels (34) gefittet. Hierbei waren  $C_\tau := \ln(4 \sigma_0)$  und  $\tau_q$  die Fitparameter und die Temperatur des 2DEG wurde als die Temperatur des Mischkryostaten angesetzt. Aus den Fits wurden die Quantenstreuzeiten bei verschiedenen Temperaturen ermittelt (siehe Tabelle 1). Die Quantenstreuzeit bei 200 mK beträgt  $\tau_q(200 \text{ mK}) = (1.41 \pm 0.02) \text{ ps}$ . Das Verhältnis der mit der Drude-Gleichung ermittelten Transportstreuzeit zu der ermittelten Quantenstreuzeit bei

der gleichen Temperatur ergibt einen hohen Wert  $\tau/\tau_q \approx 56$ . Eine größere Transportstreuzeit bedeutet, dass die Kleinwinkelstreuung (z.B. aufgrund der außerhalb des 2DEG liegenden geladenen Donatoren) dominiert [7],[8]. Die Mobilität mittels der Quantenstreuzeit beträgt  $\mu_q = e\tau_q/m = 0.37 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ , ein deutlich niedrigerer Wert als die mit der Transportstreuzeit ermittelte Mobilität (28). Selbst eine großzügige Abschätzung des Fehlers durch die Vernachlässigung der Kontaktwiderstände kann diesen großen Unterschied nicht erklären. Hier wird es deutlich, wie wichtig es ist, die relevante Streuzeit, also hier die Quantenstreuzeit, zu verwenden, um beispielsweise die Qualität der verwendeten Probe zu charakterisieren.

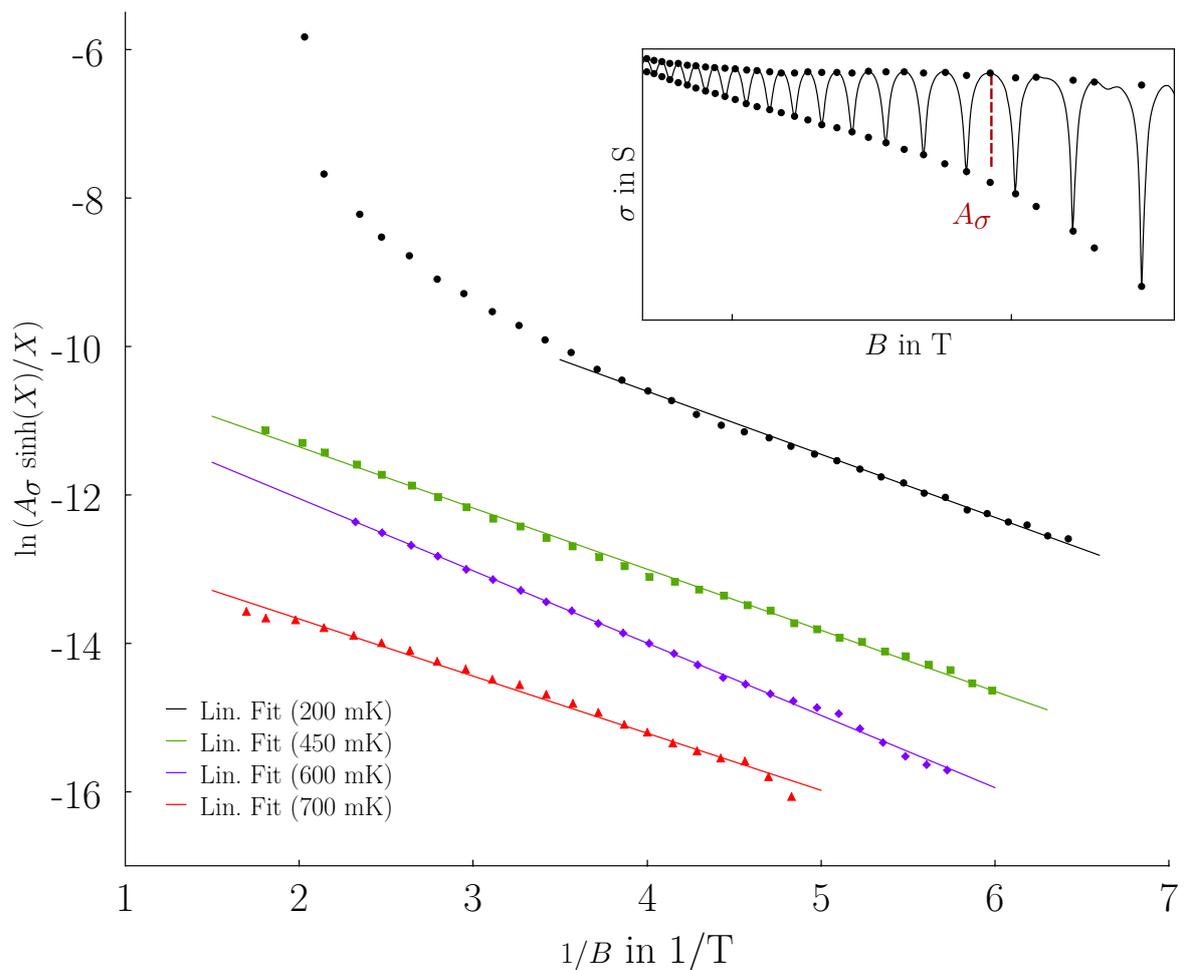


Abbildung 16: Linearisierte Amplitude der Oszillationen zur Bestimmung der Quantenstreuzeit. Oben rechts: Vorgehensweise bei der Bestimmung der Amplitude. Parameter:  $U_0 = 1 \text{ mV}$ ,  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$ .

$T_m$ in mK	$\tau_q$ in ps	$C_\tau$
200	$1.41 \pm 0.02$	$-7.21 \pm 0.07$
450	$1.45 \pm 0.01$	$-9.71 \pm 0.03$
600	$1.23 \pm 0.01$	$-10.1 \pm 0.03$

700	$1.56 \pm 0.04$	$-12.13 \pm 0.06$
-----	-----------------	-------------------

Tabelle 1: Mithilfe der Oszillationen ermittelten Quantenstreuzeiten bei verschiedenen Temperaturen und der Achsenabschnitt  $C_\tau$ , der  $\sigma_0$  bestimmt.

Auffällig in Abbildung 16 ist das Verhalten der Amplitude der 200 mK-Kurve, nämlich die Abweichung von der Linearität bei zunehmendem Magnetfeld. Diese Abweichung ist auf die Inhomogenitäten innerhalb des 2DEG zurückzuführen [7]. Außerdem scheint die Streuzeit leicht temperaturabhängig zu sein.

### 4.3 Breite der Konduktivitätsminima

Sowohl die Minima erster als auch Minima zweiter Art sind bei größeren Magnetfeldern abgeschnitten (Beobachtung B11), weshalb die Untersuchung dieser Minima in Abhängigkeit vom Magnetfeld und von der Temperatur nicht möglich ist. Zur Bestimmung der abgeschnittenen Minima werden die Beobachtungen B6 und B17 untersucht, also die Abnahme der Breite  $w$  der Täler zum Minimum hin. Dazu wurden bei festen  $\sigma$ -Werten die jeweiligen Breiten  $w(\sigma) = B_1 - B_2$  des Tals bestimmt (siehe Abb. 17). Hierbei sind  $B_1$  und  $B_2$  die Begrenzungen ('Wände') des Tals. Die Breite wird bis zu demjenigen Wert  $\sigma$  abgelesen, bei dem die Minima noch zu erkennen sind, also bis ungefähr  $10^{-8}$  S. Alle Minima, die über diesem Wert liegen, sind dementsprechend sichtbar. Und alle  $\sigma$  Werte darunter sind konstant und werden nicht berücksichtigt.

Das Verhalten der Breite  $w$  bei der Konduktivität  $\sigma(w)$  für einige abgeschnittene Minima erster und zweiter Art bei 200 mK ist in Abbildung 17 zu sehen. Die ermittelten Breiten wurden möglichst in der Nähe des Minimums mit der Exponentialfunktion gefittet:

$$\sigma(w) = \sigma_i \exp(A_w w) \quad (35)$$

Hierbei ist  $\sigma_i$  das gesuchte Minimum erster bzw. zweiter Art.

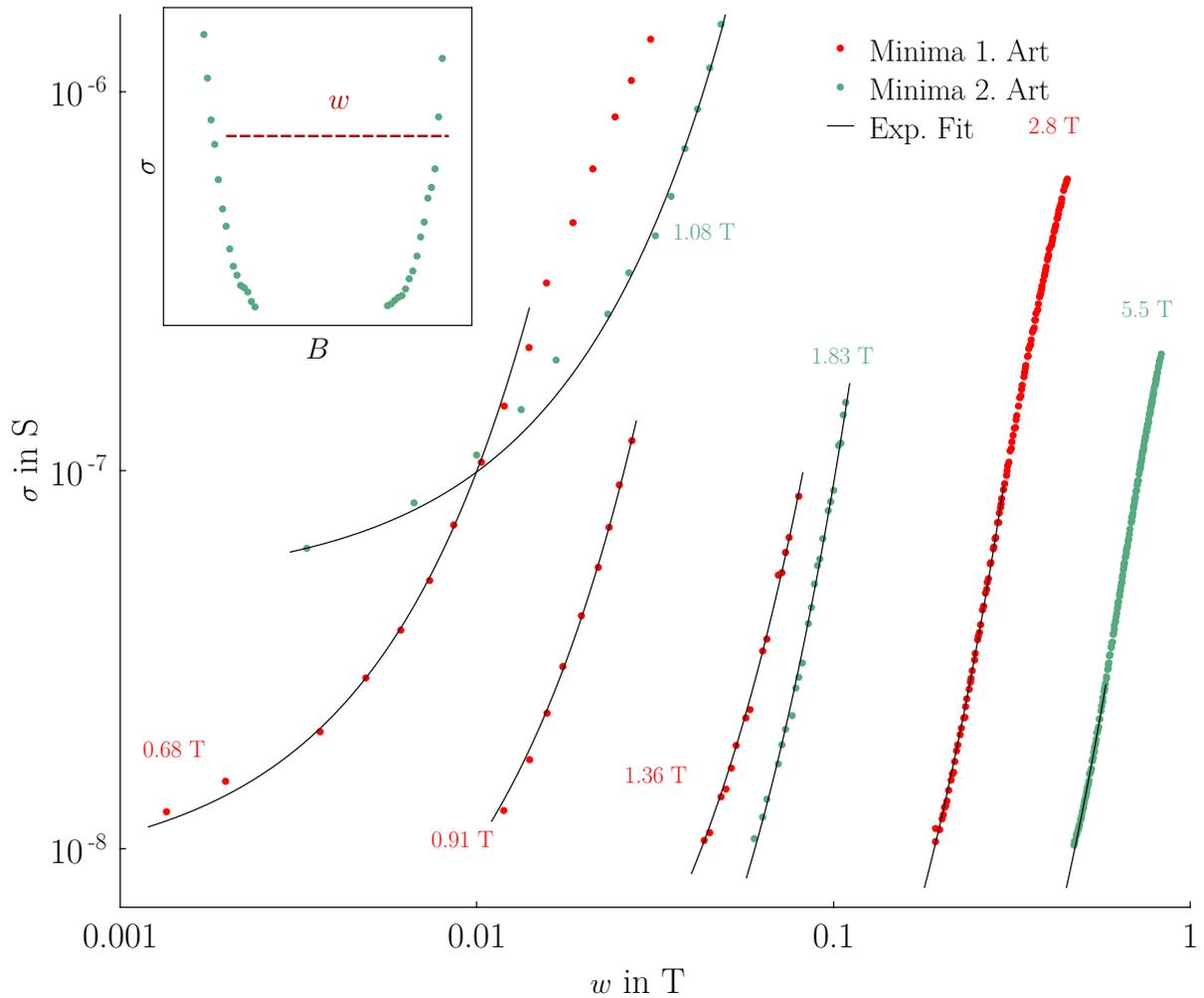


Abbildung 17: Verhalten der Minima-Breite zum Minimum hin. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ ,  $T_m = 200 \text{ mK}$ .

Bei dieser Methode wird die Annahme gemacht, dass die abgeschnittenen Minima genauso nicht verbreitert sind, wie sichtbare Minima. Es gibt also keine 'Minima-Plateaus'. Wenn diese Annahme erfüllt ist, kann durch den Plot der  $\sigma(w)$ -Kurve sowie einen Fit der Kurve und anschließender Extrapolation bis  $w = 0$  das Minimum als  $\sigma$ -Achsenabschnitt der Fit-Funktion abgeschätzt werden. Bei zu großer Entfernung vom Minimum funktioniert der Exponentialfit (35) nicht, weil die Breite dort divergiert und im mittleren  $w$ -Bereich entsteht ein größerer Fehler bei der Minimabestimmung, weil der  $\sigma(w)$ -Verlauf auf der logarithmischen Skala linear ist und damit auch der Exponentialfit. Im Bereich, wo  $w$  konvergiert, tritt eine Krümmung der  $\sigma(w)$ -Kurve auf, die nicht durch den linearen Exponentialfit mitgefittet wird (siehe Abb. 18 unten links).

Aus der Temperaturabhängigkeit der  $\sigma(w)$ -Kurve können so die Minima bei verschiedenen Temperaturen gefunden werden, siehe Abbildung 18. Die Breite nimmt mit sinkender Temperatur zu. Folglich müssen die Minima bei kleinerer Temperatur immer tiefer liegen, wenn die obige Annahme (keine 'Minima-Plateaus') erfüllt ist. Es stellt sich auch die Frage, wo die unterschiedlichen Minima bei  $T = 0 \text{ K}$  liegen würden. Wenn sie

hypothetisch alle gegen einen bestimmten Minimalwert mit sinkender Temperatur gehen, müssen die Minima ein unterschiedliches Temperaturverhalten zeigen, denn bei einer vorgegebenen endlichen Temperatur liegen sie bei unterschiedlichen Werten und müssen unterschiedlich schnell gegen den Minimalwert gehen. Aus dem Temperaturverhalten eines Minimums und gegebener Elektronentemperatur könnte dieser Minimalwert bestimmt werden.

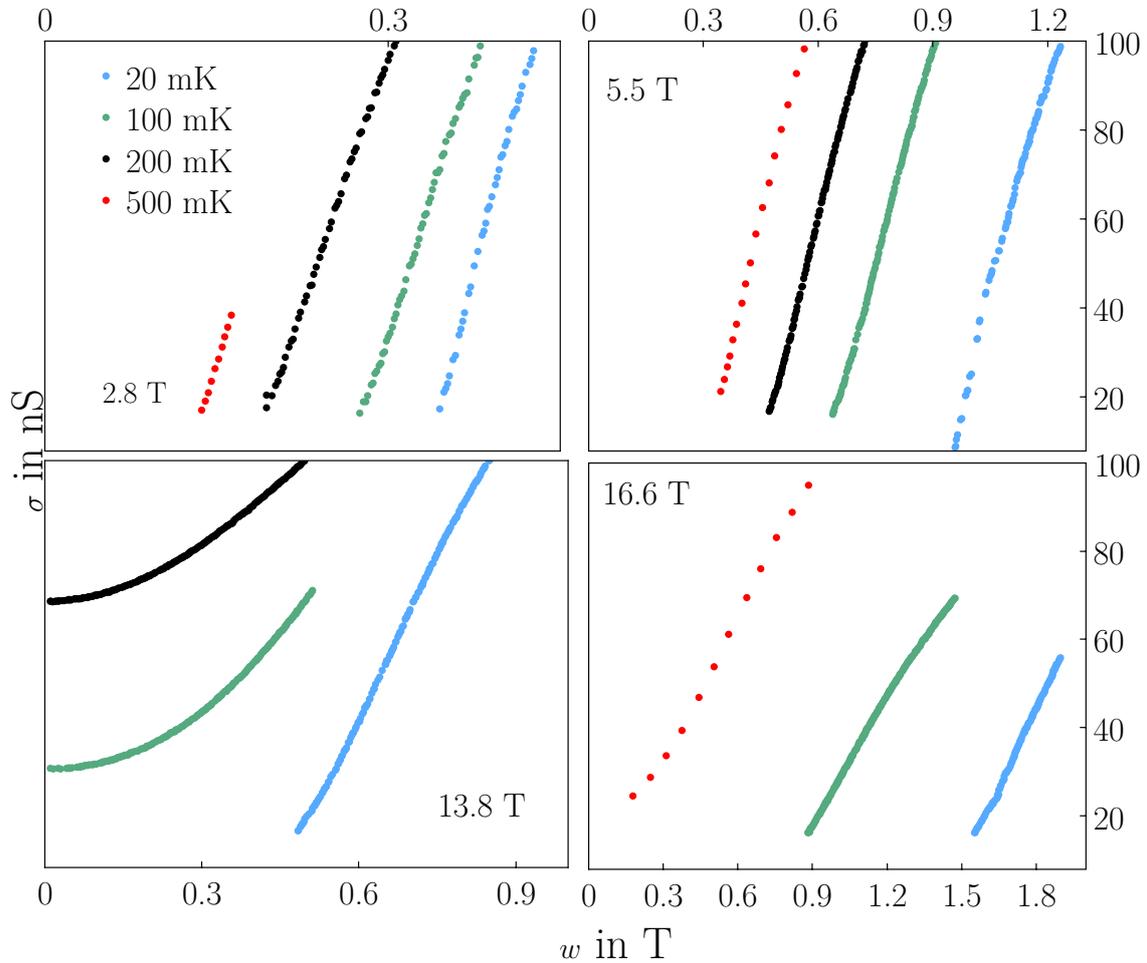


Abbildung 18: Verhalten der Breite eines Minimums bei unterschiedlichen Temperaturen. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

#### 4.4 Minima erster und zweiter Art (IQHE)

Nach der Beobachtung B3 fängt die  $\sigma(B)$ -Kurve ab einem bestimmten Magnetfeld an zu oszillieren. Diese Oszillationen werden als *Schubnikow-de-Haas Oszillationen* (SdHO) bezeichnet. Wie bereits im theoretischen Teil diskutiert, ändert sich die Zustandsdichte bei der Fermi-Energie, wenn das Magnetfeld verändert wird. Wird ein bestimmter Magnetfeldwert erreicht, bei dem sich die Fermi-Energie innerhalb eines Landau-Niveaus (d.h. bei  $\sim i + 1/2$ ) befindet, dann sind viele Zustände bei der Fermi-Energie besetzt. Da der Ladungstransport bei der Fermi-Energie stattfindet, wird die Probe bei diesem Magnet-

feldwert leitfähig und es tritt ein Maximum auf. Wird das Magnetfeld weiter erhöht, dann sinkt die Zustandsdichte bei der Fermi-Energie und die Konduktivität sinkt. Genau zwischen zwei Landau-Niveaus, wo die Zustandsdichte minimal ist, tritt ein Minimum auf (siehe Abbildung 1). Die Konduktivität sinkt jedoch nicht auf den Wert Null, weil auch viele Zustände zwischen den Landau-Niveaus existieren, wenn die Bedingung  $\omega_c \tau \gg 1$  nicht erfüllt ist.

#### 4.4.1 Beginn der Minima erster Art

In Abbildung 19 wurde das Magnetfeld  $B_\lambda$ , bei dem die Oszillationen anfangen, bei vier verschiedenen Temperaturen angeschaut. Die Beobachtung B14 hat sich bestätigt: Mit sinkender Temperatur verschiebt sich  $B_\lambda$  zu kleineren Werten hin, d.h. die Oszillationen fangen früher an. Um die große Krümmung der  $\sigma(B)$ -Kurve zum globalen Maximum hin, die das Bestimmen von  $B_\lambda$  erschwerte, zu umgehen, wurde  $B_\lambda$  an den Stellen gemessen, wo die Amplitude der Oszillation bei allen  $\sigma(B)$ -Kurven übereinstimmte. Siehe dazu Abb. 19.

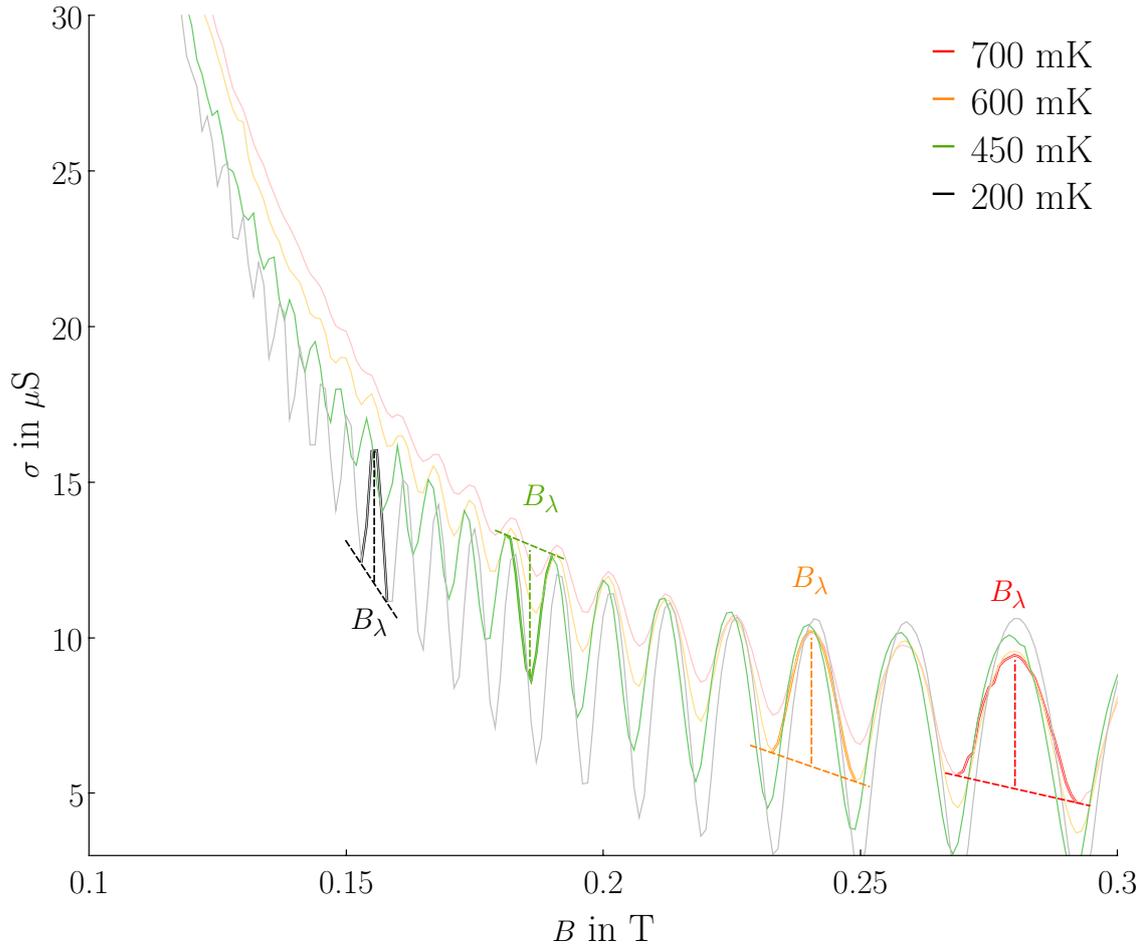


Abbildung 19: Konduktivität bis 0.3 T bei vier unterschiedlichen Temperaturen zur Untersuchung des Beginns der Oszillationen. Für alle vier Messkurven wurde Magnetfeld  $B_\lambda$  markiert, bei dem die Oszillationen beginnen. Auch wurde die Vorgehensweise der Bestimmung gleicher Amplituden skizziert. Parameter:  $U_0 = 1$  mV,  $R_v = 2.2$  k $\Omega$ .

Aus der Abbildung 19 kann  $B_\lambda$  bei verschiedenen Temperaturen abgelesen werden:

$T_m$ in mK	200	450	600	700
$B_\lambda$ in T	0.156	0.186	0.241	0.280

Tabelle 2: Magnetfelder, bei denen die Oszillationen beginnen.

Da das Magnetfeld  $B_\lambda$ , bei dem die Oszillation beginnt, sich mit der Temperatur zu höheren Werten verschiebt, ist für die Beobachtung der Oszillationen bei kleineren Magnetfeldern eine tiefere Temperatur notwendig oder für die Beobachtung der Oszillationen bei höherer Temperatur ein größeres Magnetfeld.

Das Magnetfeld  $B_\lambda$  gibt auch den minimalen Magnetfeldwert an, ab dem die Landau-Niveaus aufgelöst werden können. Zusammen mit der energetischen Verbreiterung  $\Gamma$  der

Landau-Niveaus (7) kann  $B_\lambda$  dazu benutzt werden, um die Streuzzeit abzuschätzen:

$$\tau_q \sim \frac{m}{e B_\lambda} \quad (36)$$

Hierbei wird zur Abschätzung der Wert  $B_\lambda$  der kleinsten zur Verfügung stehenden Temperatur gewählt, weil bei höheren Temperaturen die thermische Energie nicht vernachlässigbar wird. Die Abschätzung ergibt grob die Quantenstreuzeit:  $\tau_q \sim 2 \cdot 10^{-12}$  s, was gut mit den vorherigen Berechnungen übereinstimmt.

#### 4.4.2 Eindeutige Nummerierung der Minima

Mithilfe der Definition des ganzzahligen Füllfaktors (12) lassen sich die Minima eindeutig mit der folgenden Gleichung 'nummerieren':

$$\frac{1}{B_i} = \frac{e}{h n} i \quad (37)$$

und zwar so, dass für  $B_i \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow 0$  geht. Die Gerade  $1/B(i)$  muss also durch den Nullpunkt gehen, damit die Zuordnung der Füllfaktoren richtig ist. Dabei gibt das Minimum, dem der Füllfaktor  $i$  zugeordnet ist, die Anzahl der gefüllten Landau-Niveaus an. Die Abbildung 20 zeigt mehr als 36 in dieser Arbeit beobachteten ganzzahligen Füllfaktoren. In der Tabelle 3 sind einige der Füllfaktoren mit den dazugehörigen Magnetfeldern, bei denen sie auftreten, gelistet.

Bei kleinen Magnetfeldern sind nur gerade Füllfaktoren zu beobachten, weil die Zeemann-Energie in (5) im Vergleich zur thermischen Energie kleiner ist, weshalb die beiden Spinrichtungen des Elektrons entartet sind. Im Bild der Landau-Niveaus heißt das, dass die Minima ungerader Füllfaktoren nicht aufgelöst werden können. Erst die Erhöhung des Magnetfelds lässt den Zeemann-Term anwachsen, sodass für den Abstand zweier Zeeman-Niveaus  $g \mu_B B > k_B T$  erfüllt ist. Die Spinaufspaltung tritt ein - Minima zweiter Art werden sichtbar.

An Abbildung 20 ist zu sehen, wie die Landau-Niveaus mit dem Magnetfeld 'entvölkert' werden. Ab 5.5 T, was dem Füllfaktor  $i = 1$  entspricht, befinden sich alle Elektronen im niedrigsten Landau-Niveau. Alles was bei Magnetfeldern höher als 5.5 T passiert, passiert im niedrigsten Landau-Niveau. Gl. (37) verrät, wie die Position dieses Füllfaktors beeinflusst werden kann: Eine höhere Ladungsträgerdichte verschiebt die Füllfaktoren zu höheren Magnetfeldern hin. Für ihre experimentelle Beobachtung bedarf es eines stärkeren externen Magneten. Das ist der Nachteil einer Probe mit großer Ladungsträgerdichte. Der Vorteil ist: Es können mehr Füllfaktoren beobachtet werden. Eine größere Ladungsträgerdichte verschiebt die Fermi-Energie zu höheren Werten hin, d.h. mehr Landau-Niveaus sind besetzt. Beim Durchfahren des Magnetfeldes werden dementsprechend mehr Landau-Niveaus entvölkert, mehr Minima und folglich mehr Füllfaktoren werden sichtbar. Ein

weiterer Vorteil ist, dass bei größeren Magnetfeldern die thermische Energie vernachlässigbar wird und es können zusätzliche Strukturen in den Landau-Niveaus auftreten: Die Minima dritter Art.

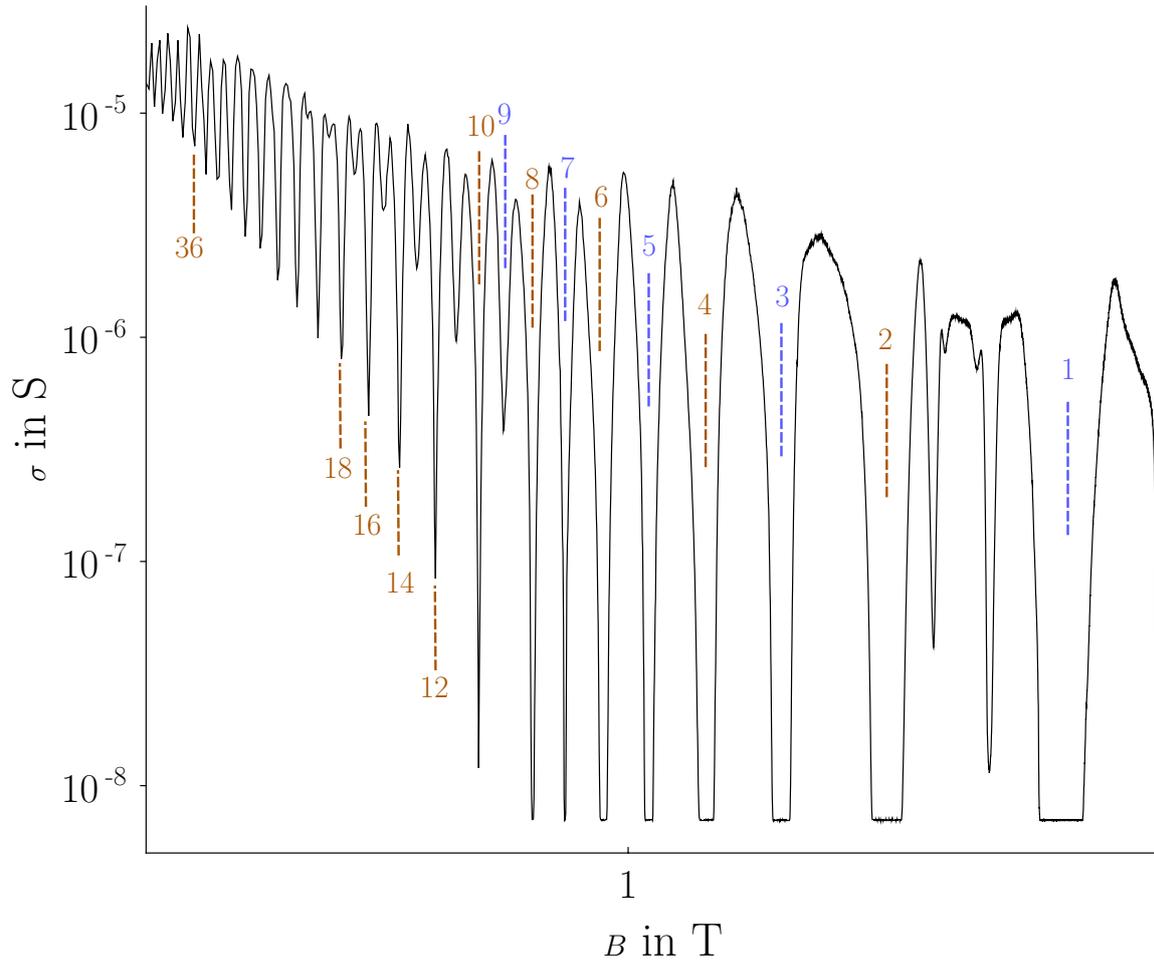


Abbildung 20: Eingezeichnete ganzzahlige Füllfaktoren in die  $\sigma(B)$ -Kurve von 0.15 T bis 8 T bei 20 mK (logarithmische Skalierung). Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$B_i$	5.5 T	2.8 T	1.83 T	1.36 T	1.08 T	0.91 T	0.78 T	0.68 T

Tabelle 3: Ganzzahlige Füllfaktoren und die dazugehörigen Magnetfelder, bei denen sie aufgetreten sind.

Der lineare Zusammenhang zwischen dem Füllfaktor und dem reziproken Magnetfeld  $1/B_i$  in (37) lässt sich auch dafür nutzen, um aus der Steigung der Geraden die zweidimensionale Ladungsträgerdichte  $n$  des 2DEG zu bestimmen. Durch den linearen Fit (37) wurde bei kleineren Füllfaktoren bis  $i = 10$  die Ladungsträgerdichte  $n = (1.327 \pm 0.004) \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  bestimmt und die Fitgerade in Abbildung 21 dargestellt. Mit zunehmendem Füllfaktor, d.h. zu kleineren Magnetfeldern hin, wird das Ablesen der Minima aufgrund

der verschobenen  $\sigma(B)$ -Kurve fehlerhafter, was an den Messpunkten in Abbildung 21 deutlich zu sehen ist. Ohne die Berücksichtigung des Fehlers, der durch die Hysterese des supraleitenden Magneten entsteht, sieht es so aus, als würde die Ladungsträgerdichte mit steigendem Füllfaktor zunehmen. Nach der Berücksichtigung des Hysterefehlers ist diese Zunahme jedoch nicht gerechtfertigt, denn die Fit-Gerade liegt noch innerhalb der Fehlerbalken.

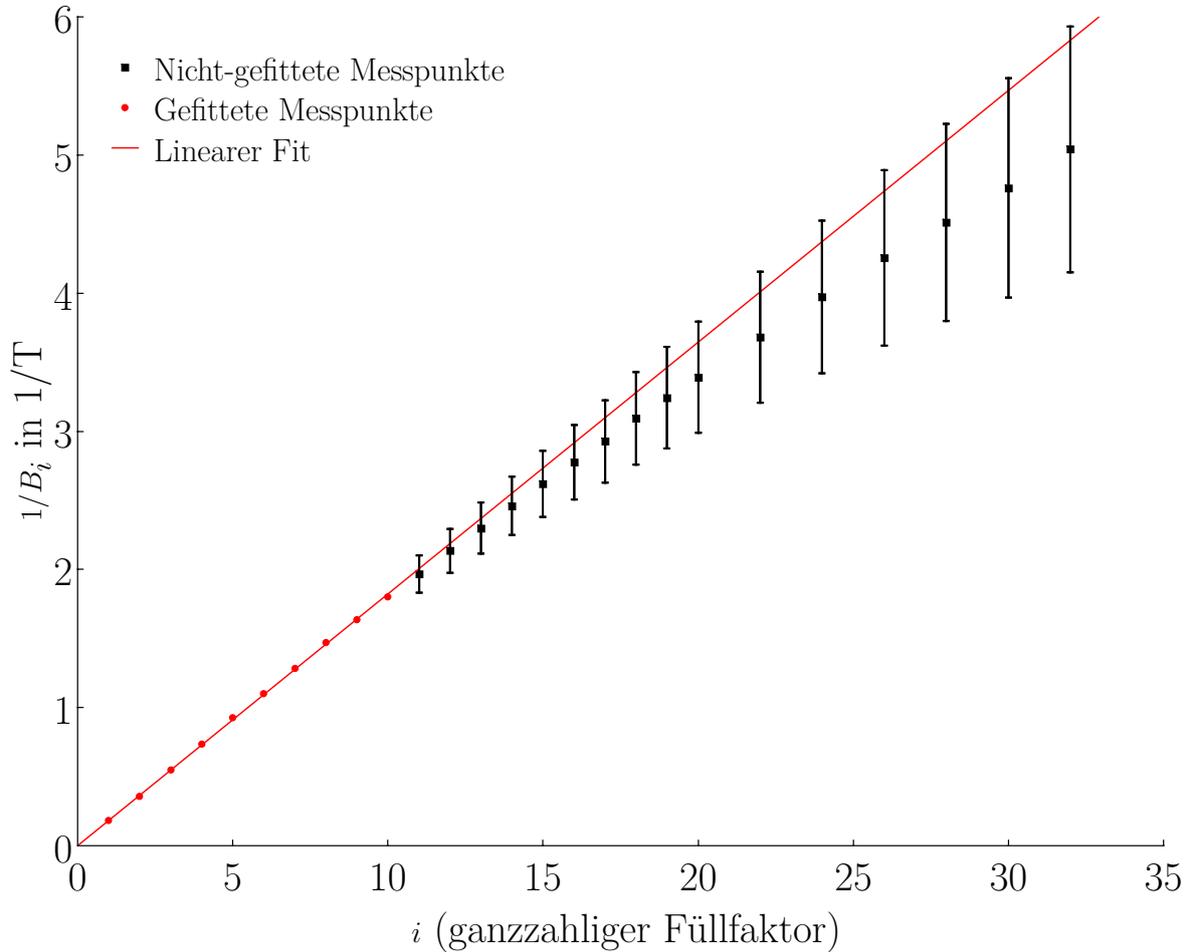


Abbildung 21: Ladungsträgerdichte mittels Füllfaktoren. Der Fehler wurde aus der Verschiebung (ca. 0.035 T) der  $\sigma(B)$ -Kurve vom Nullpunkt bestimmt. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ ,  $T_m = 20 \text{ mK}$ .

Die mit dieser Methode bestimmte Ladungsträgerdichte ist fast um den Faktor drei größer als die mit der Drude-Methode bestimmte Ladungsträgerdichte. Der Außen- und Innenkontaktwiderstand darf also bei genauerer Bestimmung der Ladungsträgerdichte mit der Drude-Methode nicht vernachlässigt werden. Der ermittelte Wert liegt in demselben Bereich der Corbino-Proben, bei denen in anderen Experimenten deutlich mehr Strukturen (d.h. Minima dritter Art) beobachtet wurden [6].

#### 4.4.3 Magnetfeldabhängigkeit der Minima erster Art

Bei der Untersuchung des  $\sigma(w)$ -Verlaufs zur Bestimmung der abgeschnittenen Minima, wurde festgestellt, dass diese Methode ohne eine bessere Fitfunktion als die Exponentialfunktion zu grob ist, um das Problem zu lösen. Abbildung 22 zeigt die gefitteten Minima erster Art für drei verschiedene Temperaturen, die nicht abgeschnitten sind. Darauffolgend sind die ermittelten Werte der abgeschnittenen Minima eingezeichnet. Auch wegen des großen Fehlers der ermittelten Minima zeigt der Plot ein sättigendes Verhalten der Minima.

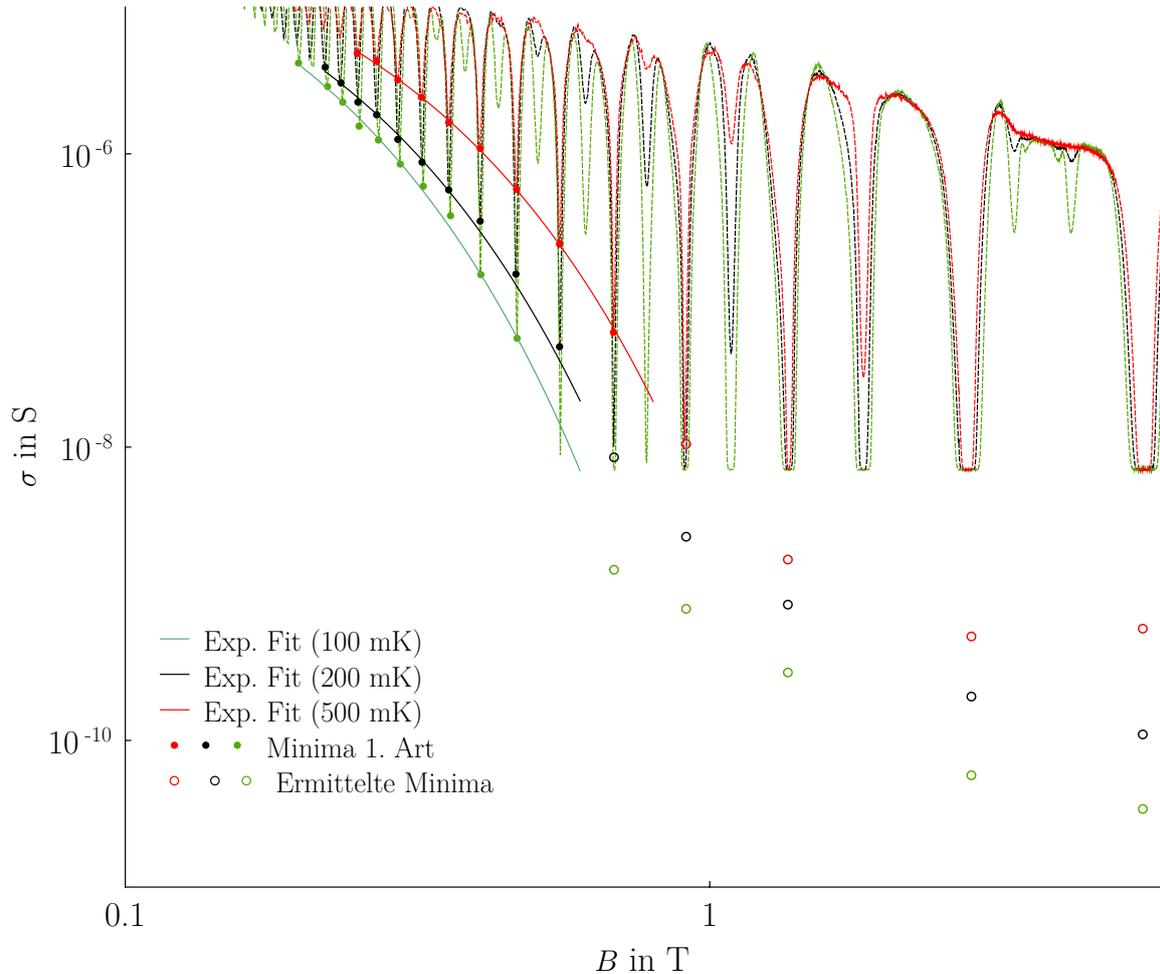


Abbildung 22: Das Verhalten der Minima erster Art in Abhängigkeit vom Magnetfeld für verschiedene Temperaturen mit eingezeichneten ermittelten Minimawerte mittels der Breite. Beide Achsen sind logarithmisch skaliert. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Die Magnetfeldabhängigkeit der nicht abgeschnittenen und nicht verbreiterten Minima kann zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte des 2DEG ausgenutzt werden. Dazu werden die benachbarten Magnetfeldwerte  $B_i$  und  $B_{i+1}$  der Minima erster Art abgelesen. Unter der Annahme, dass sich die Ladungsträgerdichte  $n$  mit dem Magnetfeld nur geringfügig ändert, kann die Differenz  $\Delta B^{-1} := 1/B_i - 1/B_{i+1}$  der reziproken Magnetfeldwerte

benachbarter Minima erster Art folgendermaßen geschrieben werden (siehe Anhang C):

$$n = \frac{2e}{h} \frac{1}{\Delta B^{-1}} \quad (38)$$

Die Auswertung der Messdaten mittels (38) ist in Abbildung 23 für zwei verschiedene Temperaturen dargestellt. Die Messung zeigt eine Magnetfeldabhängigkeit der Ladungsträgerdichte, die jedoch unabhängig von der Temperatur ist. Bei dieser Methode spielt eine konstante Verschiebung der  $\sigma(B)$ -Kurve keine Rolle, denn es werden hier nur Magnetfelddifferenzen betrachtet. Die Minima sind im untersuchten Bereich auch kaum verbreitert, sodass auch dieser Fehleranteil keine große Auswirkung auf die Messkurve hat. Die Messung zeigt, dass der Abstand der benachbarten Minima erster Art zunimmt. Mit zunehmendem Abstand sinkt die Ladungsträgerdichte von ungefähr  $1.9 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-2}$  auf  $1.3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Der Mittelwert der ermittelten Ladungsträgerdichten beträgt  $n = (1.545 \pm 0.323) \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Die Variation kommt wahrscheinlich aufgrund weiterer besetzter Subbänder in die Wachstumsrichtung der Probe [1].

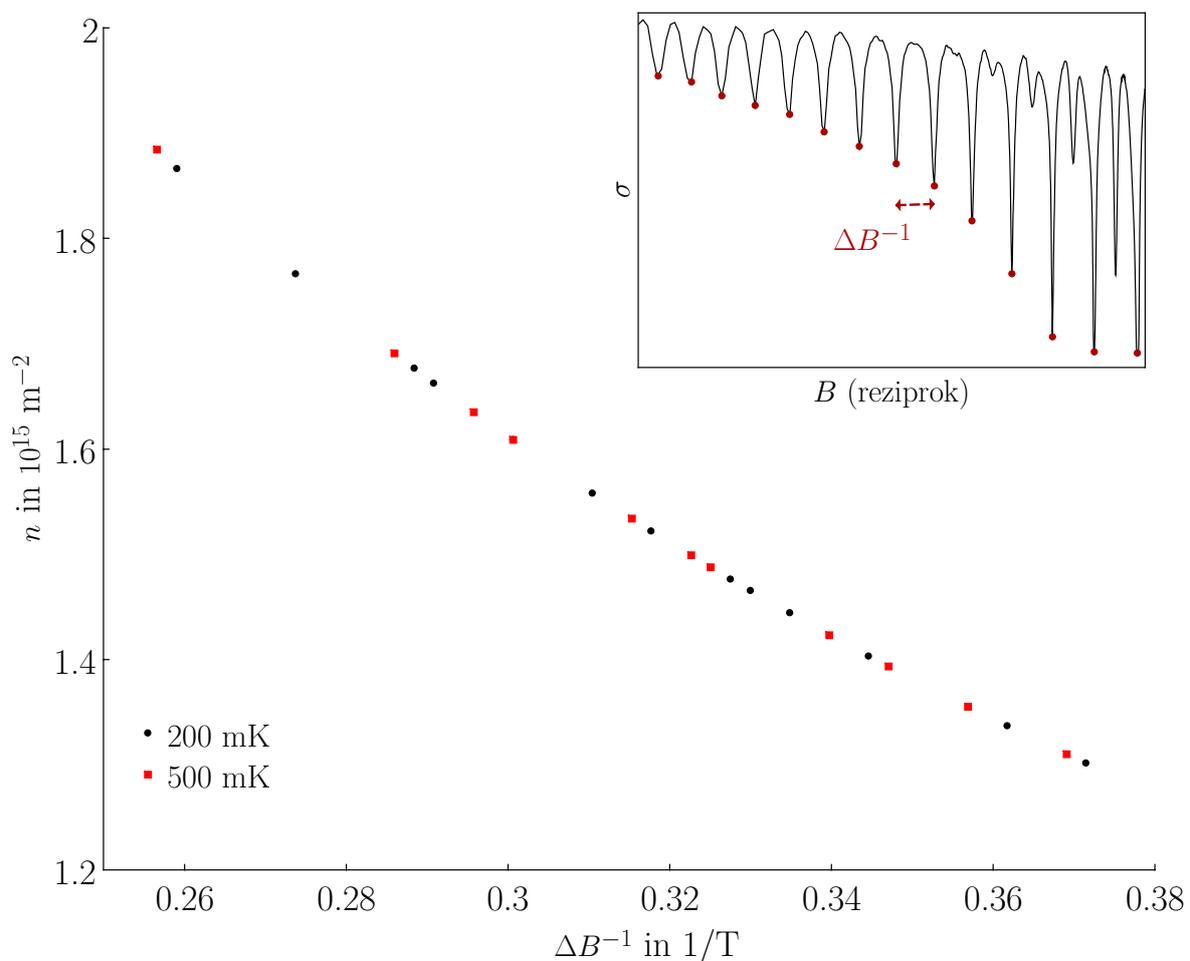


Abbildung 23: Mittels (38) ermittelte zweidimensionale Ladungsträgerdichte für zwei verschiedene Temperaturen. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

#### 4.4.4 Temperaturabhängigkeit der Minima erster und zweiter Art

Um den energetischen Abstand  $\hbar\omega_c$  zu bestimmen, kann die Temperaturabhängigkeit der Minima untersucht werden. Diese Energielücke zwischen den Landau-Niveaus wird als Aktivierungsenergie  $\varepsilon_g$  bezeichnet. Das Temperaturverhalten der Minima  $\lambda_i$  erster Art wird mithilfe der Fermi-Funktion gefittet:

$$\lambda_i(T) = \lambda_0 \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_g}{2k_B T}\right) + 1 \right]^{-1} + C \quad (39)$$

wobei  $\lambda_0$ ,  $C$  und  $\varepsilon_g$  als Fitparameter dienen. Hierbei ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante und  $\varepsilon_g := 2(\varepsilon_i - \varepsilon_F)$  die Aktivierungsenergie, die sich aus der Energie  $\varepsilon_i$  des  $i$ -ten Landau-Niveaus und der Fermi-Energie  $\varepsilon_F$  zusammensetzt und im Fall der Minima erster Art den energetischen Abstand zwischen zwei benachbarten Landau-Niveaus angibt. Hierbei wird also angenommen, dass die Fermi-Energie genau zwischen zwei Landau-Niveaus liegt; nur dann ist die Bestimmung der Energielücke zuverlässig.

In Abbildung 24 ist die Abhängigkeit einiger Konduktivitätsminima  $\lambda_i$  erster Art von der Mischkryostattemperatur dargestellt, die nicht wegen der Auflösung des Lock-In-Verstärkers abgeschnitten wurden.

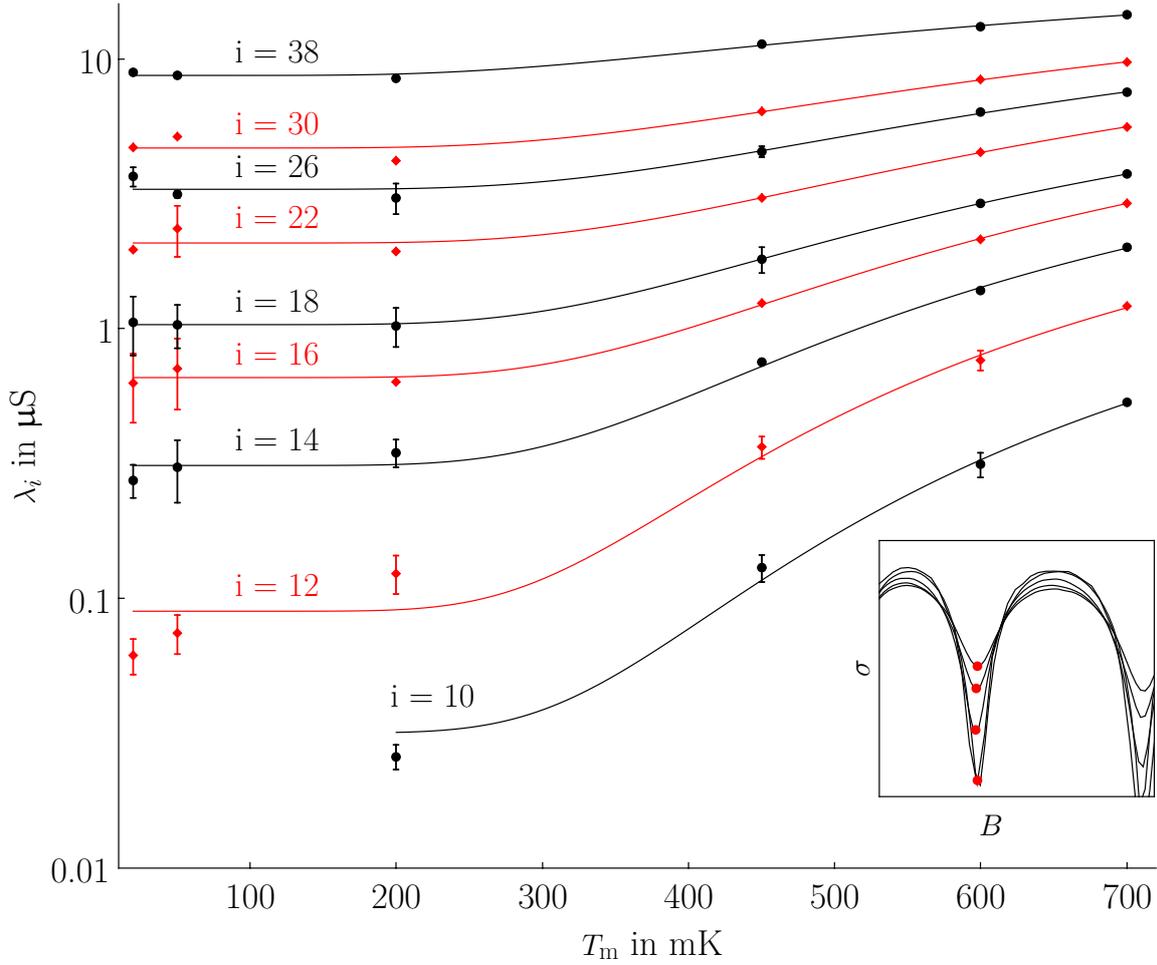


Abbildung 24: Temperaturabhängigkeit einiger Konduktivitätsminima erster Art bei kleinen Magnetfeldern mit dem Fermi-Fit. Unten rechts: Vorgehensweise. Die Fehlerbalken sind nur eine grobe Abschätzung des Ablesefehlers der Minima. Parameter:  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$ . Quellspannung  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Füllfaktor $i$	$B_i$ in mT	$\varepsilon_g$ in $\mu\text{eV}$	$\lambda_0$ in $\mu\text{S}$
10	553	$390 \pm 50$	$13 \pm 5$
12	467	$340 \pm 30$	$19.1 \pm 4.6$
14	404	$320 \pm 20$	$24.7 \pm 3.7$
16	358	$310 \pm 10$	$32.1 \pm 3.7$
18	321	$285 \pm 4$	$31.5 \pm 1.1$
22	269	$292 \pm 40$	$43.2 \pm 13.8$
26	234	$276 \pm 50$	$46.3 \pm 16.7$
30	207	$255 \pm 50$	$47.2 \pm 18.9$
38	171	$203 \pm 20$	$37.5 \pm 6.4$

Tabelle 4: Die berechneten Aktivierungsenergien bei kleinen Magnetfeldern (große Füllfaktoren).

Laut den Landau-Niveaus (5) ist die Aktivierungsenergie proportional zum Magnetfeld, folglich kann aus der Beziehung  $\hbar\omega_c = \varepsilon_g$  die effektive Masse des Elektrons im 2DEG bestimmt werden. Zu beachten ist jedoch, dass  $\hbar\omega_c$  die *Energiedifferenz* zwischen zwei benachbarten Landau-Niveaus ist. Das heißt es wäre nicht richtig, das Magnetfeld  $B_i$  eines Minimums für die Berechnung der effektiven Masse zu nehmen, denn bei diesem Magnetfeld liegt die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus (im Minimum der Zustandsdichte). Deshalb werden benachbarte Magnetfeldwerte  $\underline{B}_i$  und  $\overline{B}_i$  genommen, bei denen die Fermi-Energie beim Maximum liegt. Die Differenz der benachbarten Maxima  $\underline{B}_i$  und  $\overline{B}_i$ , die das Minimum an der Stelle  $B_i$  einschließen, wird für das Magnetfeld in  $\omega_c$  benutzt:

$$\varepsilon_g = \frac{\hbar e}{m} (\overline{B}_i - \underline{B}_i) \quad (40)$$

Dann wird die Aktivierungsenergie in Abhängigkeit vom Magnetfeld geplottet und aus der Steigung der Geraden die effektive Masse berechnet (siehe Abbildung 25). Der angegebene Fehler in der Abbildung ist lediglich der Fehler des Fermi-Fits der Aktivierungsenergie und stellt keine obere Fehlergrenze dar.

Die effektive Masse ergibt sich zu  $m = (6.9 \pm 1) \cdot 10^{-32}$  kg und liegt im Bereich der Masse  $0.067 \cdot m_e = 6.1 \cdot 10^{-32}$  kg des Elektrons in GaAs. Die Abweichungen von der Masse können bei dieser groben Abschätzung auf den Fehler zurückgeführt werden; vorausgesetzt die vorgestellte Methode zur Bestimmung der effektiven Masse ist richtig. Für eine genauere Aussage sind gut aufgelöste (vor allem nicht abgeschnittene Minima) notwendig.

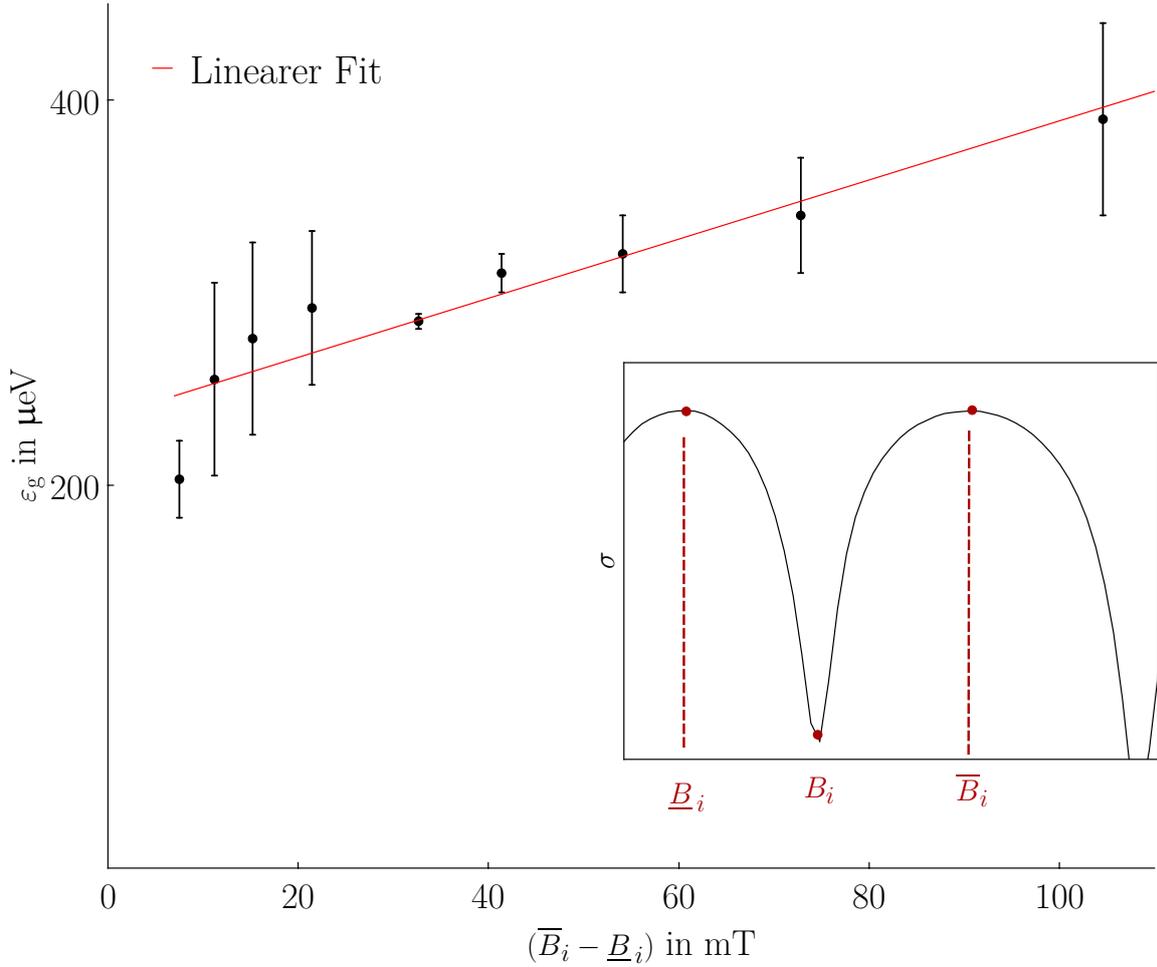


Abbildung 25: Aktivierungsenergie in Abhängigkeit von der Differenz der Magnetfelder der Nachbarmaxima, die das Minimum an der Stelle  $B_i$  einschließen. Die Steigung ergibt die effektive Masse des Elektrons im 2DEG. Unten rechts: Nachbarmaxima von  $B_i$ . Parameter:  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Der Fermi-Fit (39) kann auch zur Bestimmung der Aktivierungsenergie der Minima zweiter Art (ungerade Füllfaktoren) benutzt werden, wie in Abb. 26 zu sehen ist. Jetzt sollte die Fermi-Energie  $\varepsilon_g$  beim Minimum zweiter Art an der Stelle sein, wo eine ungerade Anzahl an Landau-Niveaus gefüllt ist. Dann muss die Aktivierungsenergie  $\varepsilon_g$  im Bereich nicht zu großer Magnetfelder, der Zeeman-Energie  $g \mu_B B$  entsprechen. Auf eine ähnliche Weise, wie bei der Bestimmung der effektiven Masse, müsste aus der Steigung der Geraden

$$\varepsilon_g = g \mu_B (\overline{B}_i - \underline{B}_i) \quad (41)$$

der Landé-Faktor  $g$  berechenbar sein. Die Steigung ergibt einen großen Wert  $g = 24 \pm 3$  im Vergleich zum  $g$ -Faktor des Elektrons in GaAs, der kleiner als Eins ist [9]. Dieser hohe Wert könnte drei Ursachen haben: 1) Es stehen nur drei Werte für die Aktivierungsenergien (siehe Tab. 5) zur Verfügung, sodass diese in Anbetracht der größeren Fehler bei zu kleinen Magnetfeldern (siehe Abb. 25) für eine genaue Bestimmung des Landé-Faktors

nicht ausreichen. 2) Die gemachte Überlegung zur Formel (41) ist falsch. 3) Der Landé-Faktor ist tatsächlich so groß, weil dieser im 2DEG von der Ladungsträgerdichte abhängt [10]. Für eine genaue Untersuchung wären nicht abgeschnittene Minima notwendig.

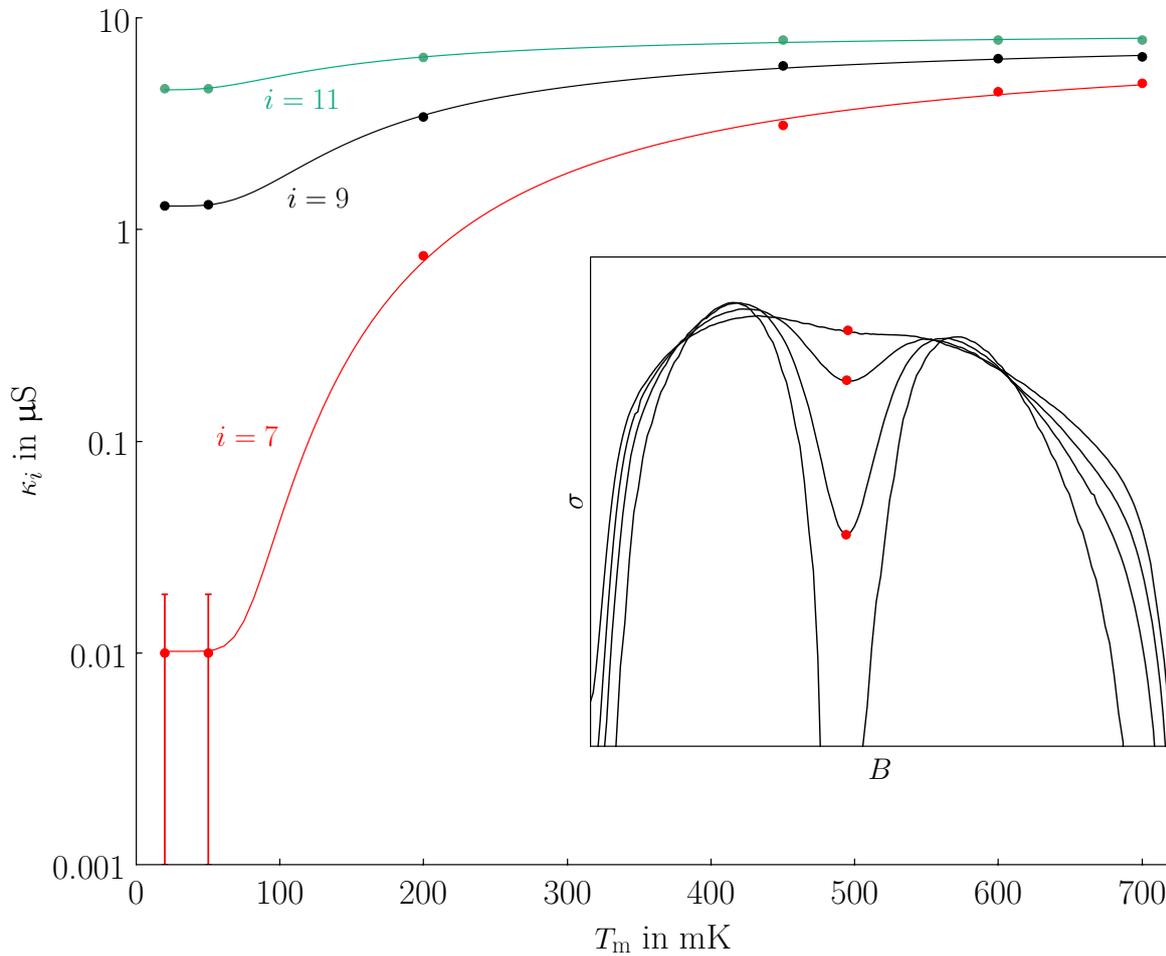


Abbildung 26: Das Verhalten einiger Konduktivitätsminima zweiter Art in Abhängigkeit von der Temperatur mit dem Fermi-Fit. Unten rechts: die Vorgehensweise. Parameter:  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$ . Quellspannung  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Füllfaktor $i$	$B_i$ in mT	$\varepsilon_g$ in $\mu\text{eV}$	$\kappa_0$ in $\mu\text{S}$
11	506	$40 \pm 6$	$8.2 \pm 0.4$
9	612	$59 \pm 3$	$14.1 \pm 0.4$
7	778	$108 \pm 5$	$16.6 \pm 0.8$

Tabelle 5: Die ermittelten Aktivierungsenergien ungerader Füllfaktoren, deren Minima nicht abgeschnitten sind.

#### 4.4.5 Beginn der Minima zweiter Art

In Abbildung 27 wurde das Magnetfeld  $B_{\kappa}$ , bei dem die Minima zweiter Art zu erkennen sind, bei vier verschiedenen Temperaturen angeschaut. Es ist deutlich zu erkennen, dass  $B_{\kappa}$  mit sinkender Temperatur kleiner wird, d.h. die Minima zweiter Art sind früher zu erkennen. Bei Magnetfeldern kleiner als  $B_{\kappa}$  haben die Elektronen unterschiedlichen Spins die gleiche Energie (Landau-Niveaus sind spinentartet).

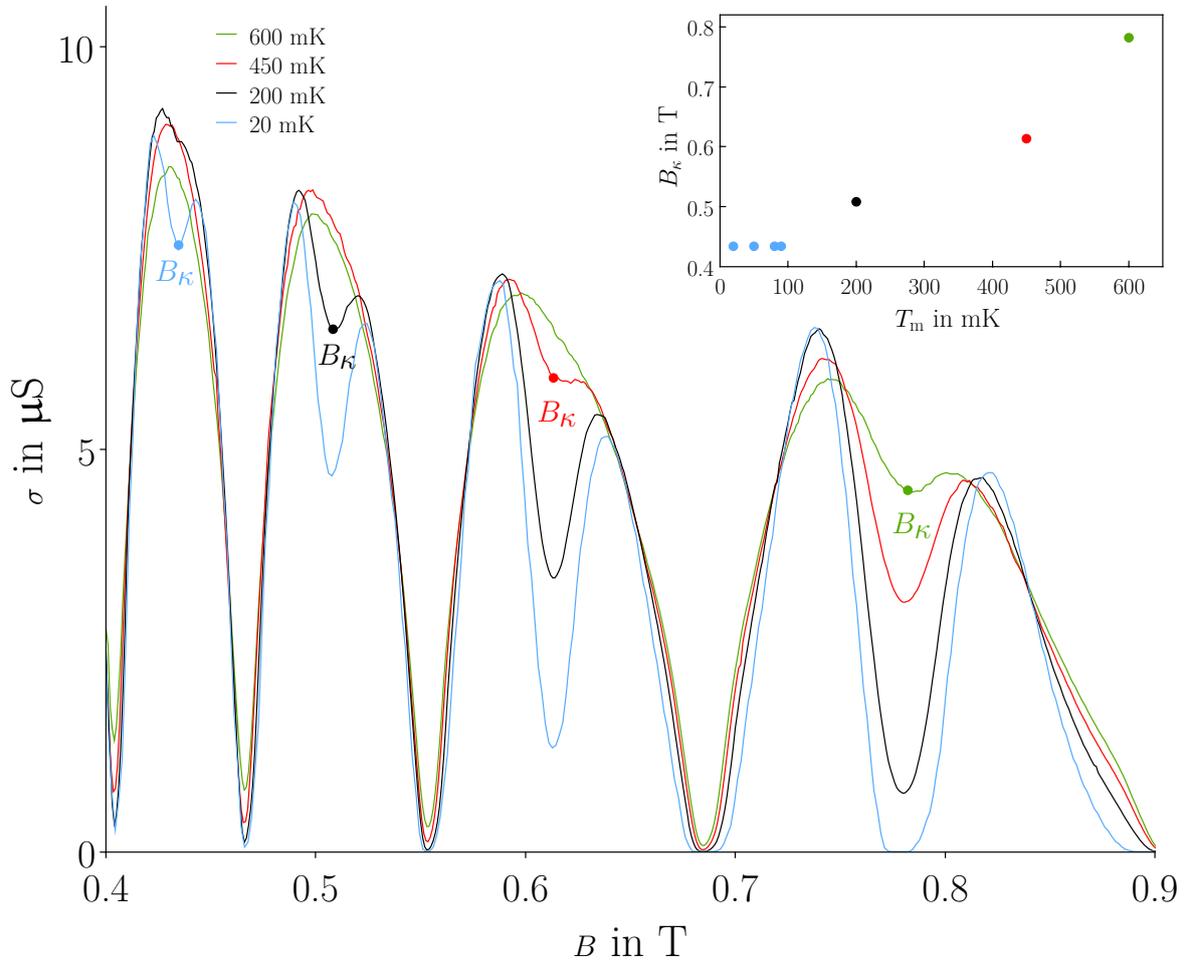


Abbildung 27: Das Magnetfeld  $B_{\kappa}$ , bei dem die Minima zweiter Art auftreten, verschiebt sich zu kleineren Werten hin mit sinkender Temperatur und erreicht eine Sättigung. Parameter:  $R_v = 2.2 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Da das Magnetfeld  $B_{\kappa}$ , bei dem die Spinaufspaltung beginnt, sich mit der Temperatur zu höheren Werten verschiebt, ist für die Beobachtung der Minima zweiter Art bei kleineren Magnetfeldern eine tiefere Temperatur notwendig oder für die Beobachtung der Minima zweiter Art bei höherer Temperatur ein größeres Magnetfeld.

In Abbildung 27 oben rechts wurde  $B_{\kappa}$  bei verschiedenen Temperaturen aufgetragen. Von 600 mK bis 200 mK wird  $B_{\kappa}$  kleiner, wie bereits festgestellt. Doch ab ungefähr

$T_m \approx 100 \text{ mK}$  ändert sich  $B_\kappa$  kaum. Diese Beobachtung könnte folgendermaßen interpretiert werden: Bei kleiner werdendem  $T_m$  wird die thermische Kopplung zwischen der Mischkammer und der Probe (aufgrund ausfrierender Phononen) schlechter, sodass  $T_m$  immer weniger Einfluss auf die Temperatur des 2DEG hat. Der Magnetfeldwert  $B_\kappa$  (100mK), bei dem die Mischkryostatentemperatur nur einen sehr geringen Einfluss auf die 2DEG-Temperatur hat, ist dann der kleinst mögliche  $B_\kappa$ -Wert bei der untersuchten Probe. Die Temperatur  $\bar{T}_m \approx 100 \text{ mK}$  kann daher als Abschätzung der 2DEG-Temperatur genutzt werden.

## 4.5 Minima dritter Art (FQHE)

Das Auftreten der Minima dritter Art wird als fraktionaler Quanten-Hall-Effekt (FQHE) bezeichnet. Mit 'fraktional' ist gemeint, dass die Füllfaktoren  $i$  beim FQHE gebrochenzahlige Werte annehmen, wenn die Positionen  $B_i$  der Minima auf die  $1/B_i(i)$ -Gerade in Abbildung 21 aufgetragen werden.

Viele fraktionale Füllfaktoren mit einem *ungeraden* Nenner können im Rahmen der Composite-Fermionen-Theorie (CF) erklärt werden [11]. Die Elektronen können ihre gegenseitige Coulomb-Wechselwirkung minimieren, wenn sie Flussquanten 'aufnehmen'. Die Komposition eines Elektrons mit einer bestimmten Anzahl an Flussquanten  $\Phi_0$  bildet ein Quasiteilchen, ein sogenanntes Composite-Fermion. Die Änderung des Magnetfelds verändert die Anzahl der Flussquanten, die die Probe durchdringen, wobei die Elektronenanzahl gleich bleibt. Erhöhung des Magnetfeldes bedeutet, dass auf ein Elektron nun mehr Flussquanten zukommen und die Coulomb-Wechselwirkung weiter abnimmt. Bei größeren Magnetfeldern wird die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen vernachlässigbar. Dadurch kann ein Composite-Fermion analog zum Elektron mit der Ein-Teilchen-Schrödinger-Gleichung beschrieben werden. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung ergibt ebenfalls Landau-Niveaus, jedoch mit einem effektiven Magnetfeld  $B^*$  und der effektiven Masse  $m^*$  der Composite-Fermionen.

Die Flussquanten reduzieren das externe Magnetfeld  $B$ , sodass die CF-Teilchen nur ein effektives Magnetfeld  $B^*$  erfahren:

$$B^* = B - 2p n \Phi_0 \quad (42)$$

hierbei ist  $2p$  die Anzahl der Flussquanten pro Elektron, die an das Composite-Fermion gebunden sind. Beim Füllfaktor  $1/2$  beispielsweise verschwindet das effektive Magnetfeld, was der Situation bei kleinen Magnetfeldern um  $B = 0$  für Elektronen entspricht. Für die CF-Teilchen lässt sich ebenfalls ein Füllfaktor  $i^*$  definieren [5]:

$$i^* = \frac{n \Phi_0}{|B^*|} \quad (43)$$

Kombination von (42) und (43) ergibt einen Zusammenhang zwischen dem (fraktionalen) Füllfaktor  $i$  für Elektronen und ganzzahligen Füllfaktor  $i^*$  für CF-Teilchen:

$$i = \frac{i^*}{2pi^* \pm 1} \quad (44)$$

Mithilfe der CF-Theorie kann der fraktionale QHE für Elektronen auf einen ganzzahligen QHE für Composite-Fermionen zurückgeführt werden.

In Tabelle 6 sind alle fraktionale Füllfaktoren aufgelistet, die innerhalb dieser Arbeit beobachtet wurden, mit dem dazugehörigen Magnetfeld, bei dem sie aufgetreten sind. In Abbildung 28 sind sie in die  $\sigma(B)$ -Kurve, unter Zuhilfenahme des Vergleichs mit der Referenzmessung in [12], eingezeichnet.

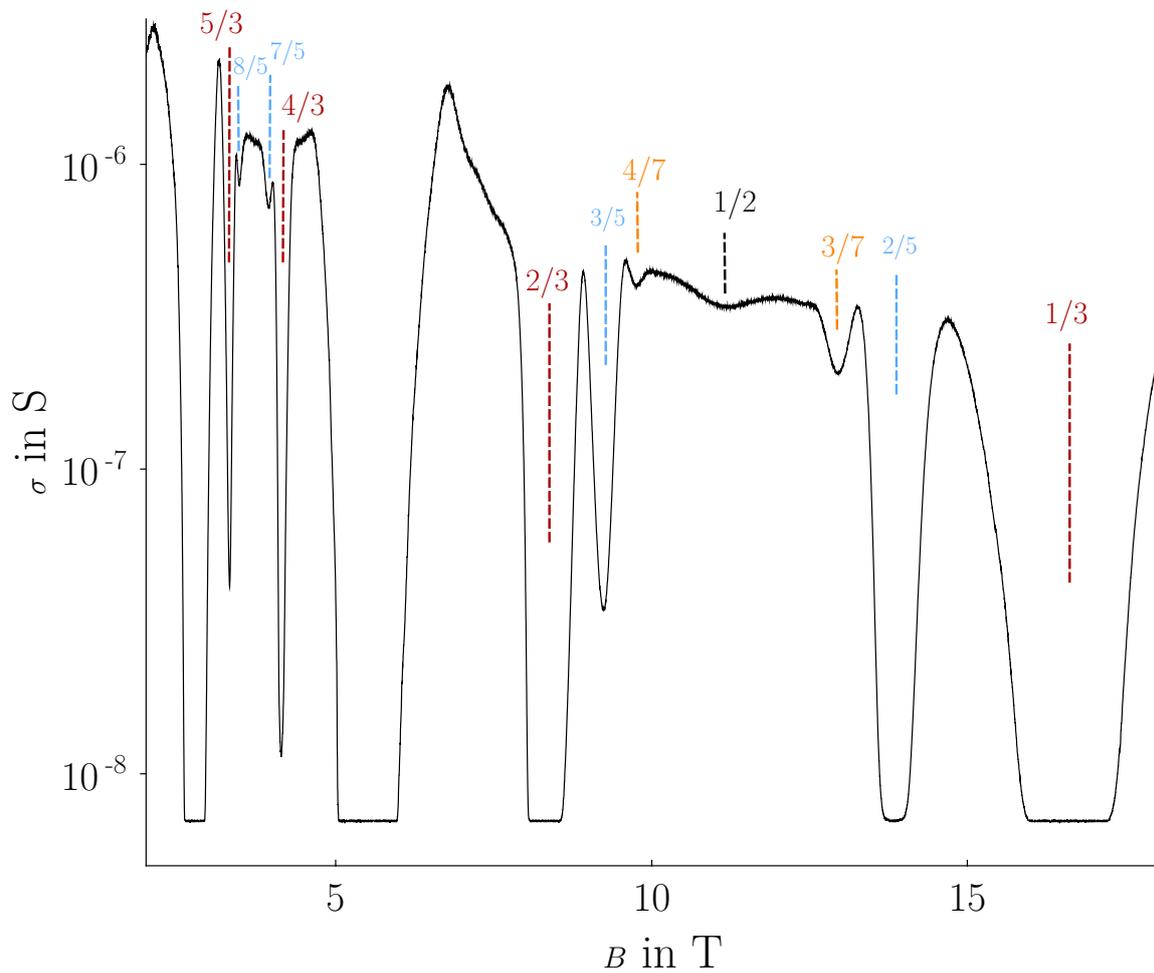


Abbildung 28: Eingezeichnete fraktionale Füllfaktoren in die  $\sigma(B)$ -Kurve bei 20 mK. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

$B_i$ (1. LN)	Füllfaktoren (1. LN)	Füllfaktoren (1. LN)	$B_i$ (2. LN)
8.3 T	2/3	5/3	3.33 T
9.25 T	3/5	8/5	3.48 T

9.75 T	4/7	-	-
11.2 T	1/2	-	-
12.95 T	3/7	-	-
13.8 T	2/5	7/5	3.93 T
16.7 T	1/3	4/3	4.1 T

Tabelle 6: Fraktionale Füllfaktoren und die dazugehörigen Magnetfelder. 'LN' steht für Landau-Niveau.

An den aufgetragenen Füllfaktoren in Abb. 28 fällt auf, dass sie einen ungeraden Nenner 3, 5 und 7 haben. Die gleichen ungeraden Nenner treten zwischen zwei benachbarten ganzzahligen Füllfaktoren paarweise auf und unterscheiden sich jeweils um 1 im Zähler: 5/3 und 4/3, 8/5 und 7/5, 2/3 und 1/3, 3/5 und 2/5, 4/7 und 3/7. Die paarweise auftretenden Füllfaktoren haben ein unterschiedlich ausgeprägtes Minimum, wobei der fraktionale Füllfaktor mit einem um 1 verringerten Zähler ein tieferes Minimum hat. Zum Beispiel  $\gamma(5/3) < \gamma(4/3)$ . Die letzte Beobachtung scheint keine Eigenheit der Probe zu sein, sondern ist in anderen Experimenten auch innerhalb einer anderen Corbino-Probe [6] und einer Hallbar [12] zu sehen.

Der Füllfaktor  $i = 1/2$  des schwach ausgebildeten Minimums stellt eine Ausnahme dar. Er zeigt im Gegensatz zu anderen Minima keine Temperaturabhängigkeit. Der 1/2 Füllfaktor ist nicht der einzige mit einem geraden Nenner, denn in anderen Arbeiten werden beispielsweise auch Füllfaktoren 3/2, 5/2 und 7/2 beobachtet [6],[12]. Doch trotz des gleichen Nenners ist deren Temperaturverhalten unterschiedlich.

Die in dieser Arbeit beobachteten fraktionalen Füllfaktoren im untersten Landau-Niveau folgen bestimmten Sequenzen, die durch die folgende Beziehungen gegeben sind:

$$i = \frac{i^*}{2i^* + 1} = \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \dots \quad (45)$$

$$i = \frac{i^*}{2i^* - 1} = 1; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \dots \quad (46)$$

Interessanterweise konvergieren alle Sequenzen für  $i^* \rightarrow \infty$  gegen einen Füllfaktor mit einem geraden Nenner. Beispielsweise die in diesem Experiment beobachtete Sequenz (45) geht von rechts und die Sequenz (46) von links gegen den gemeinsamen Grenzwert 1/2. Die im zweiten Landau-Niveau in dieser Arbeit beobachteten Füllfaktoren folgen den Sequenzen:

$$i = 1 + \frac{i^*}{2i^* + 1} = \frac{4}{3}; \frac{7}{5}; \dots \quad (47)$$

$$i = 1 + \frac{i^*}{2i^* - 1} = 2; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \dots \quad (48)$$

und sie konvergieren für  $i^* \rightarrow \infty$  von beiden Seiten gegen den Füllfaktor  $3/2$ .

#### 4.5.1 Temperaturabhängigkeit der Minima dritter Art

Die Temperaturabhängigkeit der Minima erster und zweiter Art wurde ausgenutzt, um den Energieabstand zwischen zwei Landau-Niveaus (energetischer Unterschied zweier benachbarter Kreisbahnen) oder die Zeeman-Energie (Ausrichtung der Elektronenspins) als Aktivierungsenergie in der Fermi-Verteilung zu interpretieren. Bei Minima dritter Art ist dagegen nicht klar, welche physikalische Interpretation hinter der Aktivierungsenergie eines Füllfaktors wie z.B.  $5/2$  steckt. Einige Autoren sprechen von der sogenannten 'quasiparticle pair-creation energy' als Aktivierungsenergie [13]. Trotz des Mangels einer anschaulichen Interpretation wird die Aktivierungsenergie abgeschätzt, denn sie kann dazu benutzt werden, um anzugeben, wie schwer es ist, das entsprechende Minimum im Experiment zu beobachten. In Abbildung 29 ist das Temperaturverhalten gezeigt und in der Tabelle 7 die Aktivierungsenergien aufgelistet.

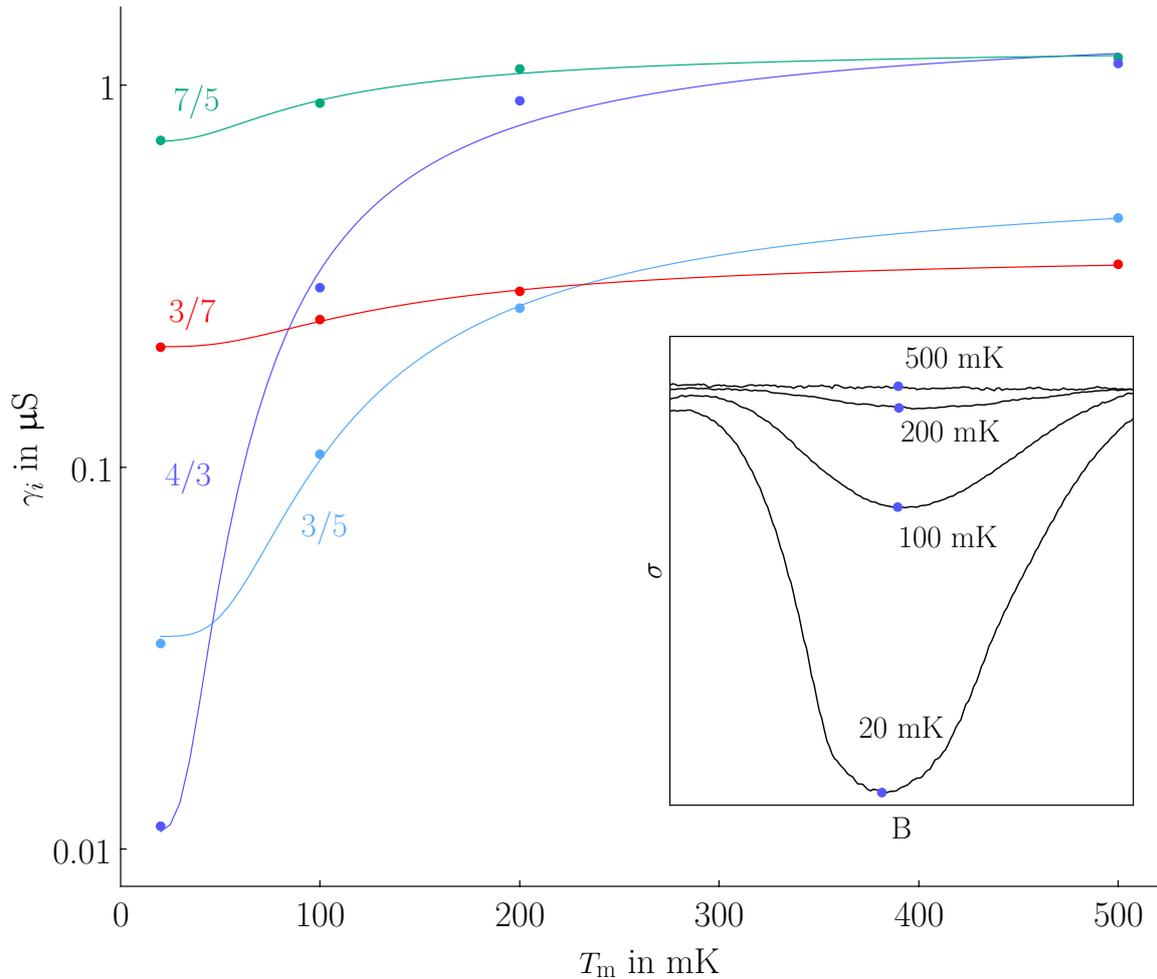


Abbildung 29: Der Fermi-Fit einiger Minima dritter Art zur groben Bestimmung der Aktivierungsenergie einiger fraktionaler Füllfaktoren. Parameter:  $R_v = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 1 \text{ mV}$ .

Füllfaktor $i$	$B_i$ in T	$\varepsilon_g$ in $\mu\text{eV}$	$\gamma_0$ in $\mu\text{S}$
3/5	9.24	$47 \pm 2$	$11.23 \pm 0.02$
3/7	12.95	$37 \pm 3$	$0.3 \pm 0.02$
5/3	3.32	$44 \pm 8$	$39.4 \pm 0.6$
4/3	4.14	$37 \pm 7$	$30.4 \pm 0.5$
7/5	3.94	$27 \pm 5$	$11.4 \pm 0.1$

Tabelle 7: Die ermittelten Aktivierungsenergien fraktionaler Füllfaktoren, deren Minima nicht abgeschnitten sind.

## 5 Ausblick

In dieser Arbeit wurden die grundlegenden Messungen des ganzzahligen und fraktionalen Quanten-Hall-Effekts durchgeführt und damit die Probeneigenschaften, wie die Ladungsträgerdichte, Mobilität und die Quantenstreuzeit bestimmt. Mithilfe des Beginns der Spinaufspaltung wurde die Elektronentemperatur abgeschätzt. Anschließend wurden die effektive Masse und der Landé-Faktor mithilfe der unterschiedlichen Interpretation der Aktivierungsenergie bestimmt.

Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt selbst lässt aber noch viele ungeklärte Fragen offen, die durch Messungen allein nicht beantwortet werden können: Warum treten die fraktionierten Füllfaktoren nicht isoliert auf, sondern in bestimmten Sequenzen? Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um eine bestimmte Sequenz von Füllfaktoren beobachten zu können? Warum ist die Elektron-Elektron-Wechselwirkung für die Erklärung des FQHE relevant und für IQHE vernachlässigbar? Warum ist der Füllfaktor  $5/2$  temperaturabhängig und  $1/2$  nicht? Warum ist der FQHE im niedrigsten Landau-Niveau am dominantesten? Fragen über Fragen, auf die es - soweit ich weiß - noch keine befriedigenden einheitlichen Antworten gibt.

## Anhang A

Hier wird eine Beziehung für die Konduktivität  $\sigma$  in Abhängigkeit vom Ringwiderstand hergeleitet. Betrachte das Ohm-Gesetz in differentieller Form:

$$j_{2d} = \sigma E_r \quad (49)$$

hierbei ist  $j_{2d}$  die zweidimensionale elektrische Stromdichte innerhalb des Corbino-Rings,  $\sigma$  ist die radiale Konduktivität und  $E_r$  das elektrische Feld innerhalb des Rings.

Die 2D-Stromdichte geht innerhalb des Rings durch eine Schleife mit dem Radius  $r$  hindurch und mit dem Umfang  $2\pi r$ :

$$j_{2d} = \frac{I_r}{2\pi r} \quad (50)$$

hierbei ist  $I_r$  der radiale Strom durch den Ring. Setze (50) in (49) ein und integriere auf beiden Seiten über den Radius  $r$  vom Innenkontaktradius  $r_i$  bis zum Außenkontaktradius  $r_e$  der Probe:

$$\frac{I_r}{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} dr = \sigma \int_{r_i}^{r_e} E_r dr \quad (51)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist die Spannung zwischen dem Innen- und Außenkontakt der Probe, also in dieser Arbeit die angelegte konstante Quellspannung  $U_0$ :

$$\frac{I_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = \sigma U_0 \quad (52)$$

Stelle (52) nach  $\sigma$  um und benutze  $U_0 = R_r I_r$ :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \frac{1}{R_r} \quad (53)$$

## Anhang B

Hier wird das Drude-Modell hergeleitet. Der Ausgang ist die folgende DGL:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \mathbf{E} - e \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m \mathbf{v}}{\tau} \quad (54)$$

Im Gleichgewicht (d.h.  $d\mathbf{v}/dt = 0$ ) und durch Multiplikation mit  $\tau/m$  folgt:

$$0 = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} - \frac{e\tau}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \quad (55)$$

Einsetzen von  $\mathbf{j} = -n e \mathbf{v}$ :

$$0 = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} + \frac{\tau}{m n} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{n e} \mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad (56)$$

$$\frac{\tau e}{m} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} = \frac{e^2 \tau n}{m} \mathbf{E} \quad (57)$$

Nach dem Ausschreiben des Kreuzprodukts lässt sich die Gleichung (57) in Matrixform darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e B_3}{m} \tau & -\frac{e B_2}{m} \tau \\ -\frac{e B_3}{m} \tau & 1 & \frac{e B_1}{m} \tau \\ \frac{e B_2}{m} \tau & -\frac{e B_1}{m} \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \frac{e^2 \tau n}{m} \mathbf{E} \quad (58)$$

In dieser Arbeit wurde ein zur Bewegung der Elektronen orthogonales Magnetfeld benutzt  $\mathbf{B} = (0, 0, B_3)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e B_3}{m} \tau & 0 \\ -\frac{e B_3}{m} \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{j} = \frac{e^2 \tau n}{m} \mathbf{E} \quad (59)$$

Mit der Einführung der Zyklotronfrequenz  $\omega_c := e B_3/m$  wird (58) zu:

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau & 0 \\ -\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{j} = \frac{e^2 \tau n}{m} \mathbf{E} \quad (60)$$

Inversion der Matrix in (60) und  $\sigma_0 := e^2 \tau n/m$  ergibt:

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \quad (61)$$

Wie zu sehen ist, es gilt für die Komponenten der Matrix  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$  und  $\sigma_{12} = -\sigma_{21}$ . Definiere:

$$\sigma(B) := \sigma_{11} = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{e\tau}{m} \right)^2 B^2 \right]^{-1} \quad (62)$$

## Anhang C

Hier wird der Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld der Minima erster Art und dem Füllfaktor hergeleitet; zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte des 2DEG. Die Anzahl der Zustände pro Fläche eines Landau-Niveaus ist gegeben durch:

$$n_L = \frac{e B}{h} g_s g_v \quad (63)$$

Bei der verwendeten Probe wurde keine Valley-Entartung beobachtet, d.h.  $g_v = 1$ . Da ausschließlich Minima erster Art zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte betrachtet wurde, muss die Spinentartung:  $g_s = 2$  berücksichtigt werden.

Die Ladungsträgerdichte  $n_i$  am  $i$ -ten Minimum erster Art ist dann unter Verwendung der Definition des Füllfaktors und (63) gegeben durch:

$$n_i = i n_L = \frac{2e B_i}{h} i \Leftrightarrow \quad (64)$$

$$\frac{1}{B_i} = \frac{2e}{h n_i} i \quad (65)$$

Und die Ladungsträgerdichte  $n_{i+1}$  des  $(i + 1)$ -ten SdH-Minimums ist dann folglich:

$$n_{i+1} = (i + 1) n_L = \frac{2e B_{i+1}}{h} (i + 1) \Leftrightarrow \quad (66)$$

$$\frac{1}{B_{i+1}} = \frac{2e}{h n_{i+1}} (i + 1) \quad (67)$$

Die reziproken benachbarten Magnetfeldwerte werden voneinander subtrahiert, woraus folgt:

$$B_i - B_{i+1} = \frac{2e}{h} \left[ \frac{i(n_{i+1} - n_i) + n_i}{n_i n_{i+1}} \right] \quad (68)$$

Unter der Annahme, dass die Ladungsträgerdichte sich mit dem Magnetfeld nur geringfügig ändert (also  $n_{i+1} - n_i \approx 0$ ), vereinfacht sich (68) zu:

$$\Delta B^{-1} := \frac{1}{B_{i+1}} - \frac{1}{B_i} = \frac{2e}{h n} \quad (69)$$

wobei hier  $n := n_i \approx n_{i+1}$  gesetzt wurde.

# Symbole und Abkürzungen

IVC	Inner Vacuum Chamber
OVC	Outer Vacuum Chamber
2DEG	Zweidimensionales Elektronengas
QHE	Quanten-Hall-Effekt
IQHE	Integraler Quanten-Hall-Effekt
FQHE	Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt
SdHO	Shubnikov-de Haas Oszillationen
$\Psi, \psi$	Elektronenwellenfunktionen
$V_C$	Einschlusspotential
$\varphi$	Elektrisches Potential
$\mathbf{A}$	Vektorpotential
$B$	Magnetfeld in Wachstumsrichtung
$\varepsilon_i$	i-tes Landau-Niveau
$\omega_c$	Zyklotronfrequenz
$\mu_B$	Bohr-Magneton
$g$	effektiver Landé-Faktor des Elektrons im 2DEG
$m$	Effektive Masse des Elektrons im 2DEG
$\mu_e$	Ruhemasse des Elektrons
$\tau_q$	Quantenstreuzeit
$\Gamma$	energetische Verbreiterung der Landau-Niveaus
$\Phi$	Magnetischer Gesamtfluss durch die Probe
$\Phi_0$	Magnetischer Flussquant
$i$	Füllfaktor für die Elektronen
$i^*$	Füllfaktor für die Composite-Fermionen
$A$	Corbino-Ringfläche
$n$	zweidimensionale Ladungsträgerdichte
$r$	Kreisbahnradius
$\Delta r$	Radiuslücke
$\underline{r}_i$	kleinster Radius
$\bar{r}_i$	größter Radius
$l_q$	mittlere freie Weglänge
$v_F$	Fermi-Geschwindigkeit
$k_F$	Fermi-Wellenvektor
$U_0$	Quellspannung
$U_m$	Gemessene Spannung am Vorwiderstand
$U_r$	Spannung an der Probe abzüglich des Kontaktwiderstands
$I_r$	Radialer Strom im den Corbino-Ring

$R_v$	Vorwiderstand im Schaltkreis der Corbino-Messung
$R_r$	Widerstand des Corbino-Rings
$R_k$	Kontaktwiderstand der Corbino-Probe
$R_c$	Gesamtwiderstand der Corbino-Probe
$\sigma_{12}$	Hall-Konduktivität
$\sigma$	Konduktivität in radiale Richtung der Corbino-Probe
$\sigma_0$	Globales Maximum der Konduktivität (um $B=0$ )
$B_k$	Magnetfeld, bei dem die Spinaufspaltung beginnt
$B_\lambda$	Magnetfeld, bei dem die SdH-Oszillationen anfangen
$\lambda_i$	Minima 1. Art
$\kappa_i$	Minima 2. Art
$\gamma_i$	Minima 3. Art
$w$	Talbreite eines Minimums
$r_i$	Innenradius der Corbino-Probe (i: intern)
$r_e$	Außenradius der Corbino-Probe (e: extern)
$T_m$	Temperatur des Mischkryostats
$T$	Temperatur des 2DEG (Elektronentemperatur)
und $\bar{B}_i$	Magnetfeld des rechten Nachbarmaximums von $B_i$
$\underline{B}_i$	Magnetfeld des linken Nachbarmaximums von $B_i$
$A_q$	Amplitude der SdHO
$X(T)$	thermischer Dämpfungsfaktor der SdHO
$\theta$	Streuwinkel

# Literatur

- [1] John H Davies. *The physics of low-dimensional semiconductors: an introduction*. Cambridge university press, Kapitel 6 (June 2012), 1998.
- [2] Achim Gross, Rudolf und Marx. *Festkörperphysik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, S.254, 2014.
- [3] Achim Gross, Rudolf und Marx. *Festkörperphysik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, Kapitel 10.4.1.4, 2014.
- [4] Masahide Yokoi, Tohru Okamoto, Shinji Kawaji, Takayuki Goto, and Tetsuro Fukase. Breakdown of the integer quantum hall effect studied by corbino discs. *Physica B: Condensed Matter*, 249:93–96, 1998.
- [5] Lina Bockhorn. *Untersuchung der Magnetotransporteigenschaften von hochbeweglichen zweidimensionalen Elektronengasen*. PhD thesis, Technische Informationsbibliothek und Universitätsbibliothek Hannover (TIB), 2013.
- [6] BA Schmidt, K Bennaceur, S Bilodeau, G Gervais, LN Pfeiffer, and KW West. Second landau level fractional quantum hall effects in the corbino geometry. *Solid State Communications*, 217:1–5, 2015.
- [7] PT Coleridge. Small-angle scattering in two-dimensional electron gases. *Physical Review B*, 44(8):3793, 1991.
- [8] PT Coleridge, R Stoner, and R Fletcher. Low-field transport coefficients in gaas/ga1-xalxas heterostructures. *Physical Review B*, 39(2):1120, 1989.
- [9] Wlodzimierz Zawadzki, Pawel Pfeffer, Rudolf Bratschitsch, Zilong Chen, Steven T Cundiff, Benedict N Murdin, and Carl R Pidgeon. Temperature dependence of the electron spin g factor in gaas. *Physical Review B*, 78(24):245203, 2008.
- [10] FF Fang and PJ Stiles. Effects of a tilted magnetic field on a two-dimensional electron gas. *Physical Review*, 174(3):823, 1968.
- [11] Jainendra K Jain. Composite-fermion approach for the fractional quantum hall effect. *Physical review letters*, 63(2):199, 1989.
- [12] R Willett, JP Eisenstein, HL Störmer, DC Tsui, AC Gossard, and JH English. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. *Physical review letters*, 59(15):1776, 1987.
- [13] GS Boebinger, AM Chang, HL Stormer, and DC Tsui. Magnetic field dependence of activation energies in the fractional quantum hall effect. *Physical review letters*, 55(15):1606, 1985.